



Ministério da Saúde

FIOCRUZ
Fundação Oswaldo Cruz



ESCOLA POLITÉCNICA DE SAÚDE
JOAQUIM VENÂNCIO

Nicolly Martins da Silva

**A RAZÃO ÁUREA: SUA IMPORTÂNCIA E APLICAÇÕES
NO ESTUDO DAS ARTES**

Rio de Janeiro

2021

Nicolly Martins da Silva

**A RAZÃO ÁUREA: SUA IMPORTÂNCIA E APLICAÇÕES
NO ESTUDO DAS ARTES**

**Projeto de monografia apresentado à Escola
Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio –
Fundação Oswaldo Cruz (EPSJV-Fiocruz)
como requisito parcial para aprovação no
Curso Técnico em Análises Clínicas.**

Orientador(a): Daniel Frota Lima

Rio de Janeiro

2021

*Dedico este trabalho ao meu pai, um homem
sábio e guerreiro, e a minha mãe uma mulher forte e batalhadora.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me conceder saúde, força e sabedoria para que eu pudesse concluir este projeto.

Agradeço aos meus pais por me concederem todo o suporte que precisei, sempre confiando no meu potencial.

Agradeço ao meu orientador, Daniel Frota, por me auxiliar em toda a minha jornada, sempre muito disposto a me ajudar.

Agradeço aos meus melhores amigos Luiz Pedro Mattos e Gabriel Francklin, por me alegrarem frequentemente, e assim, me motivarem a concluir este trabalho. A minha melhor e fiel amiga Wanessa Beserra por todo apoio, a Larissa Emiliano por me auxiliar na escolha do tema deste projeto, a Rachel de Oliveira e a Thays Santos por nunca me deixarem desistir e sempre me mostrarem que sou capaz.

Agradeço aos meus familiares por me mandarem boas energias e me motivarem.

Agradeço ao meu avaliador Felipe Leite Granato pela disponibilidade e por aceitar o convite de avaliar este trabalho.

Agradeço aos meus amigos: Gabriel Motta, Renan Falabretti, Isabella Reis, Victória Santos e Stephany Lins, por me apoiarem frequentemente.

Agradeço aos meus colegas de classe e da escola, por todos os ensinamentos diariamente.

Agradeço as minhas professoras de PTCC, Fernanda Bottino, Tainah Silva Galdino de Paula e Carla Cabral, por me fornecerem conhecimento e por toda a disponibilidade em me ajudar sempre que precisei.

Agradeço a Escola Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio por me conceder a oportunidade de produzir um trabalho científico como este.

Agradeço a todos os meus professores que contribuíram na formação de todo o meu conhecimento.

Agradeço a Biblioteca Emília Bustamante por me oferecer espaço e materiais necessários para a construção deste projeto.

Só se vê bem com o coração. O essencial é invisível aos olhos.

Antoine de Saint-Exupéry

RESUMO

A proporção áurea é uma importante razão equivalente ao número 1,618 aproximadamente, visto que é um número irracional. Sua relevância é dada pela presença em diversas áreas dos conhecimentos, como em monumentos arquitetônicos, corpo humano, logotipos, animais e artes. Seu uso permeia desde a Antiguidade até os dias atuais. Logo, este trabalho tem por finalidade realizar uma análise bibliográfica do processo histórico, dos conceitos e das aplicações da razão áurea nas artes plásticas, a partir de revisões de literaturas. O estudo contribuirá para utilização da secção áurea numa perspectiva de revelar a sua importância no campo das artes plásticas.

Palavras chaves: Razão áurea, retângulo áureo e artes plásticas.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	IV
LISTA DE TABELAS.....	V
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....	VI
1. INTRODUÇÃO.....	07
1.1.JUSTIFICATIVA.....	08
2. OBJETIVOS.....	10
2.1. OBJETIVO GERAL.....	10
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	10
3.METODOLOGIA	10
4. O SURGIMENTO DA RAZÃO ÁUREA.....	12
4.1- Egípcios.....	12
4.2- Gregos.....	13
4.2.1- Pitágoras.....	13
4.2.2- Phidas.....	16
4.2.3 - Euclides.....	17
4.3 - Idade Medieval.....	18
4.3.1- Lucas Pacioli.....	18
4.3.2- Fibonacci.....	19
4.4 – Renascimento.....	21
4.4.1- Leonardo Da Vinci.....	22
5. A RAZÃO ÁUREA E SUAS DEDUÇÕES.....	25
5.1- Segmento de Reta e o Número de Ouro.....	25
5.2- Retângulo Áureo.....	27

5.3- Espiral Áurea	29
5.4- A Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea.....	31
5.5- Sequências Contínuas.....	32
6. ANÁLISE DE DUAS OBRAS DE LEONARDO DA VINCI	34
6.1- Mona lisa	34
6.1.1- Perspectiva histórica.....	34
6.1.2 – Perspectiva artística.....	35
6.1.3- Análise matemática.....	37
6.2- Homem Vitruviano.....	39
6.2.1- Perspectiva histórica.....	39
6.2.2 – Perspectiva artística.....	39
6.2.3- Análise matemática.....	41
6.3- A proporção áurea e a padronização da beleza.....	43
7. CONCLUSÃO.....	45
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	46

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

- a.C.** Antes de Cristo
- P.** Página
- u.c.** Unidade de comprimento

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Retângulo áureo.....	08
Figura 2. Pirâmide de Quéops.....	12
Figura 3. Sólidos Platônicos.....	14
Figura 4. Pentágono regular.....	15
Figura 5. Teorema de Pitágoras	15
Figura 6. Parthenon Grego.....	17
Figura 7. Reprodução de coelhos	20
Figura 8. Desenho de helicóptero.....	23
Figura 9. A Virgem dos Rochedos.....	24
Figura 10. Segmento áureo.....	26
Figura 11. Sequência de infinitos retângulos.....	28
Figura 12. Retângulo de Ouro	28
Figura 13. Espiral Áurea.....	30
Figura 14. Concha de Nautilus.....	31
Figura 15. Mona Lisa.....	35
Figura 16. Mona Lisa e a Proporção Divina.....	37
Figura 17. Mona Lisa e a Espiral Logarítmica.....	38
Figura 18. Homem Vitruviano.....	40
Figura 19. Homem Vitruviano e a Proporção Áurea.....	42
Figura 20. Homem Vitruviano e o Pentágono Regular.....	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Tabela com valores de Fibonacci.....	32
---	----

1. INTRODUÇÃO

Alvo de estudos que permanece durante séculos, a razão áurea é de grande relevância em função da sua beleza e de suas aplicações. Segundo Levy (2018), ela é conhecida, também, como secção áurea, divina proporção, número de ouro ou proporção de ouro e sua descoberta foi obtida a partir de Euclides¹, em sua obra os Elementos.

Neste trabalho a razão áurea é definida como a divisão de 1 pelo número $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, irracional positiva com representação infinita sendo, portanto, aproximadamente 1,618 e sua representação é a letra Grega Φ (Phi). (QUEIROZ, 2007). De acordo com Santarelli (2016, p. 3) “O símbolo que a representa é Φ (Phi), a primeira vogal de Phidas (~480~430 a.C.), o escultor que usou o conceito na reconstrução do Parthenon.”

Em um dos capítulos presente neste estudo será realizada sutilmente a verificação da proporção áurea a partir de um segmento de reta qualquer, de tamanho 1, além de ser obtida, também, por sequências contínuas e infinitas, através da sequência de Fibonacci ou com o retângulo áureo (Figura 2). O retângulo áureo é uma importante representação geométrica que usufrui de artifícios algébricos para se configurar, neste caso a razão áurea é encontrada através da relação euclidiana e a semelhança entre retângulos (QUEIROZ, 2007).

¹ Matemático grego que viveu de 323 a.C. até 285 a.C., autor da obra *Os Elementos* de grande relevância para a matemática, principalmente para a geometria.

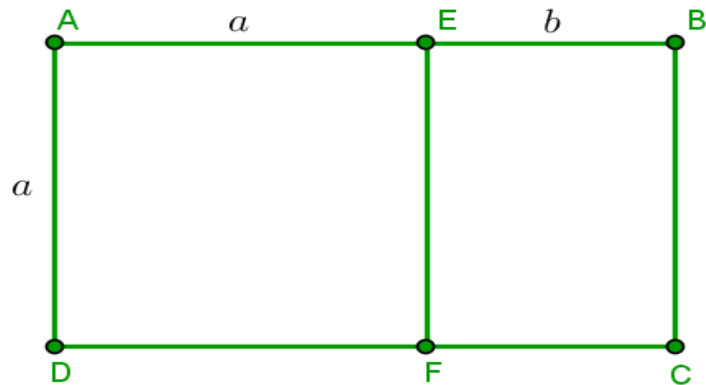


Figura 1 – Retângulo áureo

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea/>

Os últimos capítulos desta pesquisa têm por finalidade a investigação do uso da secção áurea aplicada nas artes plásticas revelando uma eventual intenção dos artistas de garantir a proporcionalidade harmônica em suas obras ao utilizar este artifício.

1.1. JUSTIFICATIVA

A proporção áurea é encontrada na natureza, arquitetura, nas diversas expressões artísticas e até no campo profissional do marketing. Como sua aparência é de natureza implícita é comum que ela não seja notada no dia a dia, porém a razão áurea sempre foi utilizada por artistas plásticos para que suas criações possuíssem proporções definidas e atrativas.

A escolha do tema foi baseada no interesse por ciências exatas e estimulada após a leitura do livro Código da Vinci de Dan Brown, onde foi apresentada a obra *O Homem Vitruviano*, importante representação da divina proporção. Posteriormente, após pesquisas sobre o tema, foi perceptível a presença da razão áurea em diversas pinturas.

A divina proporção está presente em diversos ambientes que nos cercam. Estudar sobre esta acarreta na obtenção de conhecimentos que envolvem diversas áreas do conhecimento, não só as ramificações da matemática, como também, da biologia, das artes plásticas, da música e dentre outras áreas. Portanto, o caráter desta investigação e análise deste tema é tão amplo e rico aspecto interdisciplinar merecendo uma devida atenção, revelando a necessidade da apresentação da mesma tanto para alunos do Ensino Básico como para estudantes dos cursos de graduação das diversas áreas nas quais a razão áurea está presente.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GERAL

Explorar conceitos, propriedades e aplicações no campo das artes plásticas da secção áurea.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1) Analisar o processo histórico do surgimento da razão áurea;
- 2) Compreender a definição e algumas de suas demonstrações envolvendo aspectos geométricos e algébricos de razão áurea;
- 3) Investigar a existência das relações entre a arte plástica e o retângulo áureo;

3. METODOLOGIA

Este projeto fará uma análise qualitativa se baseando em uma abordagem descritiva usando como estratégia de pesquisa a revisão bibliográfica por meio da fonte de informação Google Acadêmico.

Será feito, também, a revisão de livros e artigos referentes ao uso dos seguintes descritores: razão áurea, retângulo áureo e artes plásticas.

A análise dos materiais buscará responder questões que envolvem a descoberta da razão áurea, as controvérsias de sua existência, as diversas formas de suas aplicações históricas e sua utilização nas artes plásticas.

4- O SURGIMENTO DA RAZÃO ÁUREA

Ao longo da história muitos dos estudos a respeito da matemática envolveram a misticidade e os números (BARRETO, 2018). Um exemplo a respeito desta relação é a razão áurea, que teve sua utilização desde a sociedade egípcia (3500 a.C.) até os dias atuais.

4.1- Egípcios

Os egípcios são considerados povos que possuíam interesse em contar e medir com exatidão, construindo belíssimos monumentos (QUEIROZ, 2007). De acordo com o portal de informações História do Mundo, esses monumentos eram em especial templos, construídos para os faraós visto que os mesmos acreditavam em vida eterna, logo eram necessários grandes túmulos para prosseguirem sua vida após a morte.

Em concordância com Queiroz (2007), as pirâmides de Quéops em Gisé foram construídas em 2551 a 2528 a.C e em função de sua beleza são consideradas uma das sete maravilhas do mundo antigo. Em sua construção é notória a presença da secção áurea entre a razão da medida da altura de uma de suas faces laterais, representada pela letra x , pela metade da medida da base, tendo sua representação por y , como mostra a figura 2 (ANASTÁCIO, 2015).

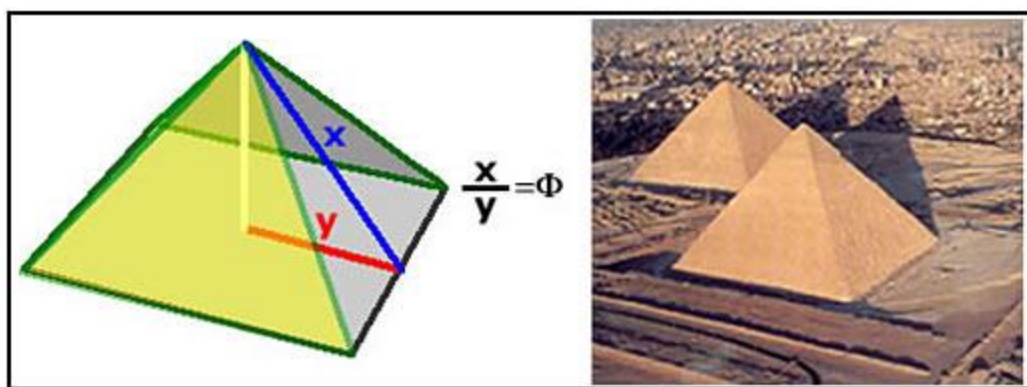


Figura 2: Pirâmide de Quéops
Fonte: Ferreira, 2015

Deste modo, a utilização da secção áurea não ocorria necessariamente com a consciência a respeito da mesma, já que se tratava de um período de 2.500 a.C, em que é improvável que os egípcios tenham sido os pioneiros da descoberta (COSTA, 2008).

4.2- Gregos

Em concordância com Costa (2008), na Grécia antiga eram característicos estudos relacionados à beleza e a harmonia da matemática, visto que o número regeria o universo. “A preocupação com proporções supostamente perfeitas e belas passavam do mundo das ideias para o mundo real grego quando a arte e arquitetura eram provas concretas da busca pela harmonia” (SANTARELLI, 2016, p. 2), portanto, é notória a relação entre proporcionalidade e beleza usada pelos gregos a fim de atingir o perfeito. Nessa sociedade surgiram grandes protagonistas para o surgimento da razão áurea, estudaremos sobre eles a seguir.

4.2.1- Pitágoras

Pitágoras de Samos nasceu na Grécia em aproximadamente 580 a.C., durante sua vida estudou com Anaximandro um dos alunos de Tales de Mileto² (LEVY, 2018). De acordo com Queiroz (2007), a escola grega Pitagórica foi responsável por diversas descobertas importantes, dentre elas os sólidos platônicos, nome dado para representar os poliedros regulares, como mostra a figura 3 abaixo.

² Tales de Mileto (625-547 a.C) foi um grande matemático, sua importância se deve já que ele foi o primeiro matemático a formular teoremas, ou seja, suas hipóteses eram comprovadas por leis matemáticas já provadas. (LEVY, 2018)

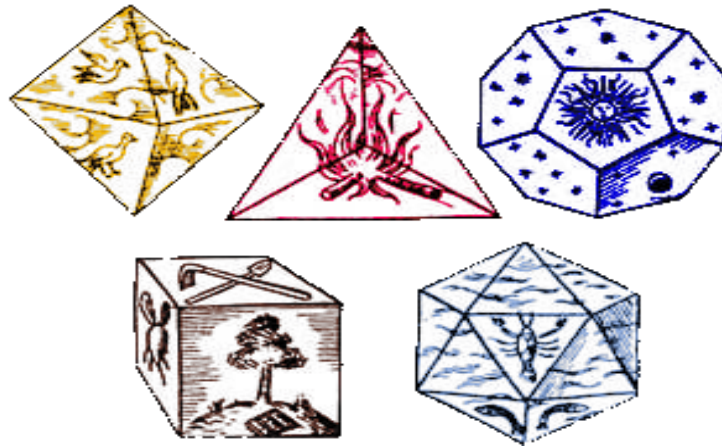


Figura 3: Sólidos Platônicos

Fonte: <http://mateselaios2.blogspot.com/2011/04/los-solidos-platonicos.html>

É importante ressaltar que, os poliedros regulares foram nomeados como poliedros platônicos, já que Platão³ e seus seguidores estudaram-vos com grande vigor e associando-os com elementos da natureza, o fogo representado pelo tetraedro, a água pelo icosaedro, a terra pelo cubo, o ar pelo octaedro e o universo pelo dodecaedro regular (COSTA, 2008).

O pentagrama, outra fascinante descoberta, foi considerado pelos pitagóricos como um símbolo para a Irmandade formada por eles (BARRETO, 2018). Em concordância com a Mendias (2005), uma das propriedades do pentágono regular afirma que quando traçada suas diagonais se cruzam, formando um novo pentágono (figura 4). Além disso, foi comprovada a relação entre o pentágono e a secção áurea, obtida a partir da razão entre a medida de uma de suas diagonais e a medida de seu lado. (ANASTÁCIO, 2015).

³ Platão (428-348 a.C.) foi um importante filósofo e matemático, responsável por importantes estudos a respeito dos poliedros regulares e criador da escola Pitagórica em Atenas. (LEVY, 2018)

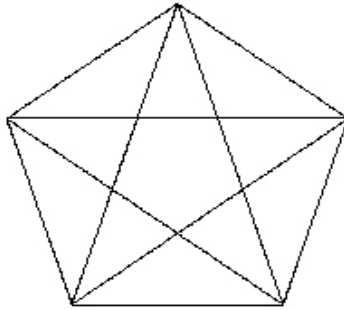


Figura 4: Pentágono Regular

Fonte: <http://coloradonunes.pbworks.com/w/page/16150777/pentagono>

Em concordância com Anastácio (2015), é possível observar o pentágono regular na natureza, em flores como petúnia, azaleia e jardim-estrela, portanto, em função da presença deste polígono existe uma correlação com a presença da divina proporção.

De acordo com Queiroz (2007), um dos estudos pitagóricos mais notáveis e aplicados, inclusive nos dias atuais, foi o conhecido teorema de Pitágoras. A figura 5 mostra uma das inúmeras deduções do teorema acima citado, que diz: “Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados a medida de cada um dos catetos”.

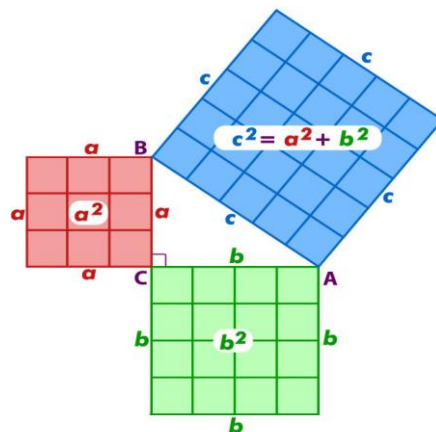


Figura 5: Teorema de Pitágoras

Fonte: <https://aprendiendomas.com.br/wp-content/uploads/2020/04/Maths-28.jpg>

Chegando a seguinte fórmula,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Em concordância com Belussi, Geraldini e Prado (2013), Pitágoras também teria feito um estudo de grande relevância para as artes musicais, onde sua teoria se baseava na música, nos espaços e nos números, constituindo relações entre os sons, as cordas de um instrumento e as razões 1:2:3:4.

De acordo com Costa (2008) é importante ressaltar que, “O que se conhece do pensamento pitagórico é baseado em fontes posteriores. Não é possível precisar aquilo que é próprio de Pitágoras e o que é contribuição de seus discípulos.”, ou seja, seus teoremas podem ter sido fruto de seus discípulos.

4.2.2- Phidas

Phidas viveu entre 490 e 430 a.C. e foi considerado um dos maiores escultores e construtor de sua época (QUEIROZ, 2007). Uma de suas grandes construções foi o Parthenon Grego (figura 6) construído entre os anos de 447 e 442 a.C. em Atenas, sendo considerado o templo dedicado à deusa Atena (COSTA, 2008).



Figura 6: Parthenon Grego

Fonte: <http://joseane-matematica.blogspot.com/2007/10/proporo-urea.html>

A partir da figura 6 pode-se notar a relação entre a razão áurea e o Parthenon grego, onde sua altura e largura são capazes de configurar o retângulo áureo, cuja representação será feita no próximo capítulo (QUEIROZ, 2007).

É importante ressaltar que a partir do nome Phidas é originada a letra grega Φ (Phi), que representará a secção áurea (BELUSSI, GERALDINI E PRADO, 2013).

4.2.3 - Euclides

Euclides foi um grande matemático grego, que viveu de 323 a.C. a 285 a.C. na Alexandria, sendo responsável pela criação da obra *Os Elementos*, que possui grande relevância para a geometria (LAURO, 2005). Em concordância com Levy (2018), esta obra é uma junção entre as descobertas de grandes matemáticos gregos como Pitágoras, Eudoxo, Platão, entre outros.

Nesta obra, ele foi responsável, dentre outras proposições, pela criação da proposição de média e extrema razão, que resultará no número de ouro, como será visto no próximo capítulo (LAURO, 2005).

Além de *Os Elementos*, Euclides é responsável por outras importantes obras, como por exemplo, os *Elementos da Música*, *Óptica*, *Fenômenos*, *Livro das Falácias* (LEVY, 2018).

4.3 - Idade Medieval

De acordo com Barreto (2018), ao longo do período medieval houve uma decadência em relação aos conhecimentos científicos já que foi considerado um momento histórico de grande repressão por parte dos imperadores, levando a queima de livros e até bibliotecas, como ocorreu com a Biblioteca de Alexandria.

Apesar do atraso na matemática ocidental por alguns séculos outras culturas continuavam avançando, como ocorreu na Índia e na sociedade islâmica, levando então a produção do sistema numérico atual e ao desenvolvimento da álgebra e trigonometria, que posteriormente foram retornando a serem estudadas na Europa Medieval (LEVY, 2018).

4.3.1- Lucas Pacioli

Lucas Pacioli nasceu no Norte da Itália em 1446 e viveu como um frade franciscano, acabando por morrer em sua cidade em 19 de junho de 1517, sendo responsável por diversas obras e reconhecido pelo seu tratado a respeito de contabilidade, foi reconhecido como “o pai da contabilidade” e sua notória didática para ensinamentos (SANGSTER E SCATAGLINIBELGHITAR, 2010).

Sua obra mais importante foi um tratado escrito em 1509, a respeito da secção áurea, nomeado como *De divina Proportione*, que foi ilustrado por Leonardo da Vinci, importante pintor que será estudado no capítulo 3 (LAURO, 2005), ou seja,

Ele acreditava que Razão Áurea era um conteúdo para mentes humanas perspicazes e inquisidoras e todas aquelas que gostam de artes, arquitetura, música, perspectiva, pintura, filosofia e tantas outras. Paciole também afirmava que os estudos sobre Razão Áurea levariam a delicados, sutis e admiráveis ensinamentos e que estes levariam a uma ciência muito secreta. (ANASTÁCIO, 2015, p. 6).

De acordo Anastácio (2015) (apud Lívio, 2007), a divina proporção deveria receber este nome por alguns motivos, dentre eles o fato de ser única assim como Deus, além de ser representada por segmentos de reta (como será visto no próximo capítulo) representando Pai, Filho e Espírito Santo, ou seja, a Santíssima Trindade.

4.3.2- Fibonacci

Leonardo de Pisa nasceu na Itália em 1170 e viveu até 1250, posteriormente foi apelidado por Fibonacci (LEVY, 2018), logo,

Fibonacci recebeu o apelido de “filho da boa natureza” apenas em 1838, pelo historiador Guillaume Libri, em seu livro *Histoire des Sciences Mathematique em Italie*. Segundo Libri, Fibonacci, em sua tradução do latim, significa “*filius Bonacci*, filho da família Bonacci, ou filho da boa natureza”. (BARRETO, 2018, p. 18).

Em 1202, Fibonacci publicou seu primeiro livro *Liber Abacci* (Livro Ábaco), que se tornou sua mais importante obra, possuindo diversos problemas matemáticos e abordando áreas da matemática como a álgebra e a aritmética (SANTOS, CARDOSO E SILVA, 2012).

De acordo com Lauro (2005), em seu livro *Leonardo propôs o seguinte problema:*

Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?

A partir da figura 7, é perceptível que a resolução do problema gera a seguinte sequência numérica: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (SANTOS, CARDOSO E SILVA, 2012). Segundo Barreto (2018), a sequência seria nomeada como Sequência de Fibonacci, posteriormente, por Edouard Lucas, matemático francês do século XIX.

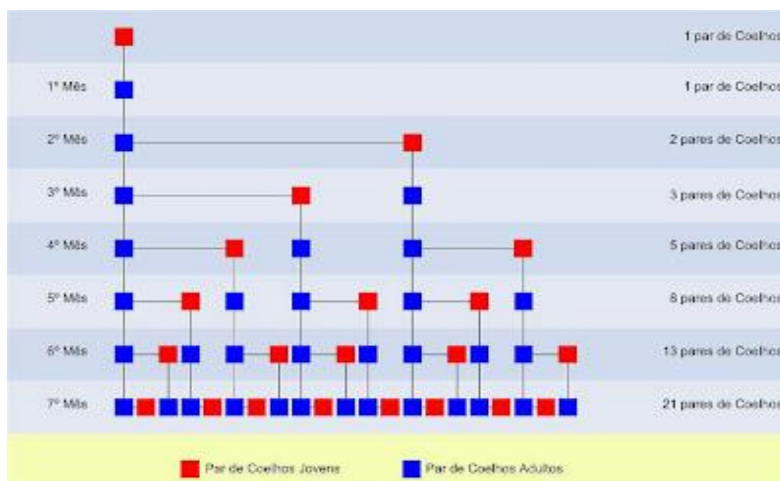


Figura 7: Reprodução de coelhos
 Fonte: <http://fibonaccihmt.blogspot.com/>

Segundo Anastácio (2015, p. 6), “Os números da sequência se relacionam com a Razão Áurea e possuem propriedades fascinantes e assustadoras. Há uma lista imensa de relações matemáticas que envolvem os números da sequência de Fibonacci.”, esta relação entre a Sequência de Fibonacci e a Secção Áurea será vista no próximo capítulo.

É relevante, também, a relação entre o retângulo áureo e a sequência de Fibonacci, através de uma espiral, que é nomeada como espiral maravilhosa, como será visto no capítulo 2 (BARRETO, 2018).

4.4 - Renascimento

O Renascimento ocorreu no período entre os séculos XIV e XVII, momento posterior à Idade Média, no qual muitos estudos que antes permaneciam em função do comando estabelecido pela igreja foram retomados (LEVY, 2018). A transição entre esses dois períodos iniciou com o surgimento dos burgos⁴ que levou ao renascimento comercial desenvolvendo o renascimento da vida urbana e da cultura.

De acordo com Fonseca (1997, p. 2) “[...] entende Renascimento, no seu significado literal, como re-nascença do homem, nascimento, outra vez, do homem, de um homem novo e renovado (por oposição ao homem medieval)”, ou seja, ocorre uma retomada de artifícios característicos da cultura greco-romana, que foram levados para a Itália, país de maior influência do Renascimento, por refugiados de Constantinopla (QUEIROZ, 2007).

Durante este período histórico alguns temas foram muito comentados e utilizados, por exemplo, naturalismo, humanismo, antropocentrismo, classicismo e racionalismo sendo refletidos nas esculturas, na arquitetura, na literatura e principalmente nas pinturas (FONSECA, 1997).

Em concordância com Fonseca (1997), é relevante ressaltar que apesar do contexto de desenvolvimento científico, a religião não foi condenada e nem abandonada pelos estudiosos, ocorrendo apenas uma separação entre a fé e a razão, porém infelizmente continuou havendo condenações por parte da Igreja.

Nesse contexto, surgiram importantes estudiosos das diversas áreas do conhecimento científico. Na física: Nicolau Copérnico, Galileu Galilei, Giordano Bruno, Kepler; na biologia: Miguel Servet; na matemática: Descartes, Pierre de Fermat; nas artes: Michelangelo Buonarroti, Rafael Sanzio, Donatello, Sandro Boticelli e Leonardo Da Vinci, sendo este último o objeto de reflexão principal na análise deste projeto.

⁴ Centros comerciais urbanos da Idade Média

4.4.1- Leonardo Da Vinci

Filho de Pierro Da Vinci, um homem próspero e Catarina Lippi, uma camponesa, Da Vinci nasceu em Anchiano, na Itália, em 15 de abril de 1452 (ALZENBERG, 2019). Ao longo de sua vida, ele recebeu ótima educação que agregado aos benefícios de sua cidade acarretou em um grande artista e cientista, dedicado à escultura, arquitetura, matemática, física e anatomia, tendo como sua paixão a pintura (BARROS, 2008).

Por ser um grande estudioso, Leonardo foi muito observado e, portanto,

(...)Leonardo transcende em muito os limites de uma história da arte para poder ser considerado uma figura pertencente à história da cultura, à história do espírito humano e das suas realizações ou, pelo menos, das suas ambições. (FONSECA, 1997, p.2).

De acordo com Ajzenberg (2019), Da Vinci viveu em diversas cidades como: Milão, Florença, Roma, nas quais se encontrou com importantes figuras da época, por exemplo, Lucas Pacioli e Michelangelo.

Uma das características de Da Vinci é a relação que ele mantém entre as artes e a ciência, para ele, de acordo com Barros (2018, p. 76) “O Cientista, como o Artista, deveria ser um observador e um experimentador – e os sentidos deveriam ter um papel fundamental tanto em uma como em outra destas formas de apreensão de realidade”, deixando claro que para ser um bom cientista é necessária a experimentação, que pode ser feita através de recursos artísticos, confirma-se então a necessidade do mundo sensível caminhar com o mundo inteligível.

Para guardar todas as suas descobertas e conclusões, Da Vinci anotava em cadernos que posteriormente foram transformados em livros, porém curiosamente, mesmo sendo canhoto ele escrevia no sentido da direita para a esquerda, sendo considerada por alguns

estudiosos, uma maneira de manter suas anotações como um mistério, ou simplesmente, para não borrar a tinta (ALZENBERG, 2019).

Em concordância com Ajzenberg (2019), Leonardo desenvolveu importantes projetos para a engenharia dentre eles, por exemplo, seu desenho de helicóptero (Figura 8), além de contribuir com desenhos a respeito da biologia, como por exemplo, o “Estudo dos embriões”.

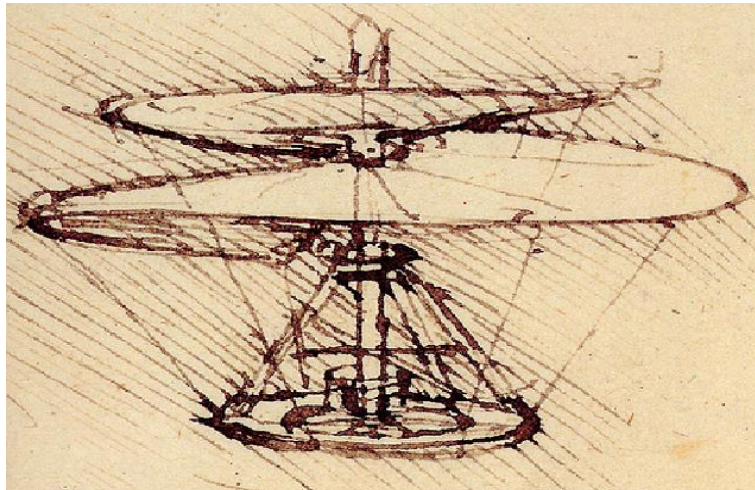


Figura 8: Desenho do helicóptero

Fonte: <http://leonardodavincipaintings1.blogspot.com/2013/02/the-leonardo-version-of-helicopter.html>

Dentre suas obras artísticas têm-se como destaque: *A Virgem dos Rochedos* (Figura 9), *A última ceia*, *Mona Lisa* e *Homem Vitruviano* (BARROS, 2018).



Figura 9: A Virgem dos Rochedos

Fonte: <https://www.topzine.cz/wp-content/uploads/2012/01/Virgin-at-the-rocks.jpg>

Com cerca de 62 anos, Leonardo foi morar em Amboise, na França, a convite do Rei Francisco, após 2 anos, mais precisamente em 2 de maio de 1519, o artista e cientista acaba por falecer (ALZENBERG, 2019).

5- A RAZÃO ÁUREA E SUAS DEDUÇÕES

Para atingir o número de ouro existem demonstrações matemáticas que envolvem aspectos geométricos, algébricos e aritméticos. Apesar das diferentes demonstrações, todas acarretam a mesma conclusão, isto é não existindo uma forma absoluta. Relevando assim a riqueza matemática da razão áurea, já que está relacionada a muitos estudos científicos e conceitos matemáticos.

Neste capítulo dar-se-á o estudo das demonstrações do número de ouro através de segmento de reta, retângulo, espiral geométrica, número de Fibonacci e sequências contínuas e infinitas.

5.1- Segmento de Reta e o Número de Ouro

Em 300 a.C., Euclides fez um importante estudo com segmentos de retas, que segundo Barreto (2018), acarretou na razão áurea, sendo portanto, Euclides o pioneiro em estudar a respeito deste tema (Lívio, 2006).

De acordo com Moreira e Santos (2018) esse estudo se baseou em um segmento de reta \overline{AC} de tamanho 1 unidade de comprimento (u.c.) dividida por um ponto B, de forma que é possível então estabelecer uma relação na qual, o todo \overline{AC} está para o maior segmento \overline{AB} assim como, \overline{AB} está para o menor segmento \overline{BC} , logo:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

A partir da divisão do segmento de reta, o segmento de maior comprimento \overline{AB} será igual a x, e o de menor comprimento \overline{BC} , será igual a 1-x, como é visto na figura 10:

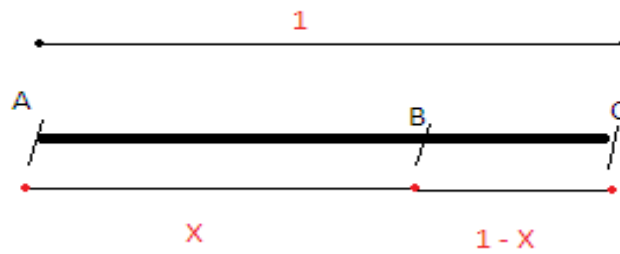


Figura 10: Segmento áureo

Ao realizar a substituição da relação descoberta por Euclides, pelos seus respectivos comprimentos configurados a partir da figura 1 é obtida a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{(1-x)}$$

Quando desenvolvida resulta na seguinte equação:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Sendo a equação do segundo grau, a solução terá dois valores, ou seja, $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Por se tratar da medida de um comprimento é utilizado apenas o valor positivo, portanto

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

A obtenção do número de ouro é feita através da divisão $\frac{1}{x}$. Ao substituir o x pelo valor encontrado anteriormente, tem-se que:

$$\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

De acordo com Queiroz (2007) ao realizar a divisão e substituir $\sqrt{5}$ pela sua aproximação, 2,236, será obtido 1,618, aproximadamente, visto que se trata de um número irracional. Segundo Anastácio (2015, p. 4), “Quanto mais precisa for a mais próxima do número de ouro estará.”.

5.2- Retângulo Áureo

O retângulo áureo ou retângulo de ouro é uma importante ferramenta usada por artistas, arquitetos e designers para a composição de imagens, em função da sua perfeita simetria (ANASTÁCIO, 2015). Segundo Queiroz (2007), foi feita em 1876 uma pesquisa por Gustav Fechner, que comprova a preferência da população, por retângulos com medidas semelhantes a do retângulo áureo, demonstrando a relevância e o impacto da divina proporção.

Para construir um retângulo áureo, como na figura 11, é necessário,

(...) retirar um quadrado do retângulo. Assim, teríamos outro retângulo menor do qual, também, retirariamos outro quadrado e, por conseguinte, teríamos outro retângulo, (...). Esse processo pode ser repetido de modo infinito. (SANTOS, CARDOSO E SILVA, 2012, p.5).

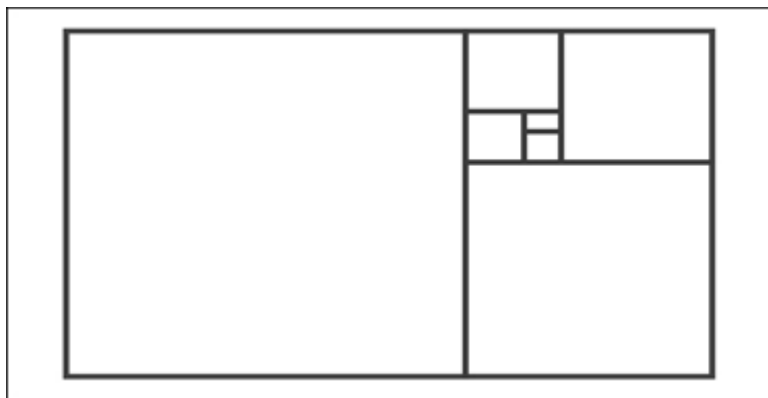


Figura 11: Sequência de infinitos retângulos

Fonte: <http://lexi-designdeconstructed.blogspot.com/2010/11/proportion-and-scale.html>

Para comprovar a presença do número de ouro no retângulo, segundo o portal de informações da Obmep, é necessário construir um retângulo semelhante ao da figura 12, onde o segmento de reta \overline{AB} é representado por $a + b$ e o segmento \overline{AD} por a .

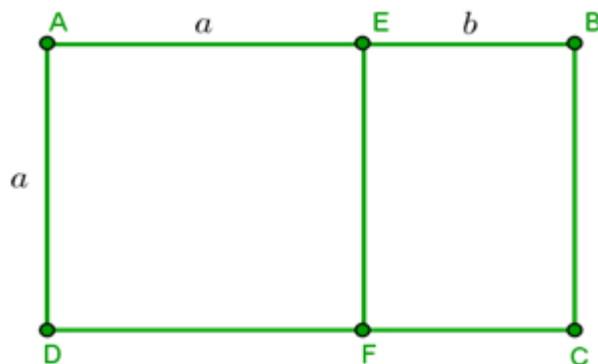


Figura 12: Retângulo de ouro

Fonte: <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea/>

Ao realizar uma semelhança entre os retângulos ABCD e BCEF, têm-se que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Resultando na seguinte equação,

$$a^2 = ab + b^2 \rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

Definindo o segmento a por x e b por 1, têm-se

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Na qual a solução encontrada corresponde ao número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$.

5.3- Espiral Áurea

A espiral áurea (figura 13) foi nomeada por Descartes⁵ como espiral equiangular e por Jakob Bernoulli, como espiral logarítmica em função da sua propriedade de aumentar o tamanho, mas não alterar a forma, já que seu crescimento segue uma progressão geométrica (QUEIROZ, 2007).

⁵ René Descartes (1596-1650) foi um notável matemático e filósofo francês do Renascimento, responsável pela criação do plano cartesiano, muito utilizado para os estudos do cálculo.

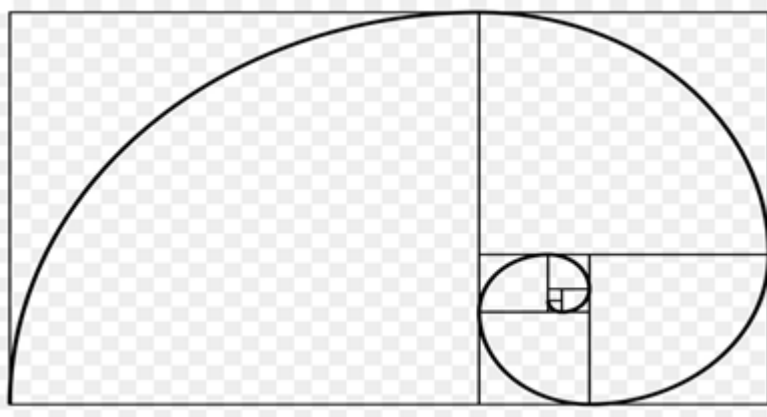


Figura 13: Espiral Áurea

Fonte: <https://www.gratispng.com/png-2jizsw/>

Para obter a espiral geométrica, deve-se

(...) ligar os pontos sucessivos onde esses "quadrados rodopiantes" dividem os lados em Razões Áureas, -obterá uma espiral logarítmica que se enrola para o interior na direção do pólo (...) chamado caprichosamente de "o olho de Deus". (LÍVIO, 2006, p. 140).

De acordo com Anastácio (2015), a espiral logarítmica pode ser encontrada na natureza como, por exemplo, no crescimento de sementes de girassol, na concha de Nautilus (figura 14) e segundo Santos, Cardoso e Silva (2012) é observada, também, em furacões e na via láctea.

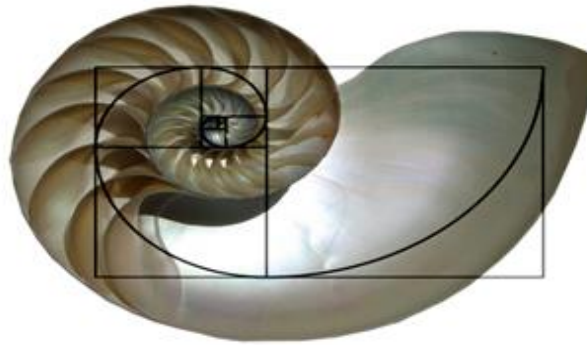


Figura 14: Concha de Nautilus

Fonte: <https://gizmodo.uol.com.br/wpcontent/blogs.dir/8/files/2015/04/Concha-e-proporcao-aurea.jpg>

5.4- A Sequência de Fibonacci e a Proporção Áurea

Como visto no capítulo 2, a sequência de Fibonacci é obtida a partir da resolução do problema a respeito da reprodução de coelhos sendo, portanto, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,

De acordo com Queiroz (2007), para chegar à razão áurea a partir da sequência de Fibonacci, deve-se seguir um padrão, no qual o termo geral é:

$$f(n) = \frac{u(n+1)}{u(n)}$$

Ou seja, deve-se dividir um termo, $u(n+1)$, pelo seu antecessor, $u(n)$, de forma que essa nova sequência se aproxime do número de ouro (BRANDÃO, 2019), como mostra a tabela 1:

u (n+1)	u (n)	f (n)
1	1	1,000
2	1	2,000
3	2	1,500
5	3	1,666...
8	5	1,600
13	8	1,625...
21	13	1,615...
34	21	1,619...
55	34	1,617...

Tabela 1: Tabela com valores de Fibonacci

Fonte: a autora

Essa descoberta da razão áurea através da sequência de Fibonacci foi feita no século XVII por Johannes Kepler⁶, porém sua demonstração foi comprovada apenas no século XVIII com estudos de Robert Simon (1687-1768), importante matemático (LÍVIO, 2006).

5.5- Sequências Contínuas

Em concordância com Lívio (2006), é possível utilizar frações contínuas para obter a secção áurea, artifício utilizado na Teoria dos Números. Para Anastácio (2015, p.5), essas divisões são obtidas com “[...] um processo iterativo para a representação de um número.”.

⁶ Johannes Kepler (1571- 1630) nasceu na Alemanha e foi um importante astrônomo da Idade Moderna que defendia o heliocentrismo, ou seja, o sol no centro do universo.

Têm-se, então,

$$X = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Realizando a substituição da equação,

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Acarretando na equação já citada neste trabalho,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Levando diretamente a proporção áurea, ou seja, 1,618...

6- ANÁLISE DE DUAS OBRAS DE LEONARDO DA VINCI

Leonardo Da Vinci ao longo de sua história foi responsável por realizar relações entre as diversas áreas do conhecimento, tendo como destaque a presença de recursos matemáticos nas suas principais confecções artísticas (BRANDÃO, 2019 apud CÂMARA; RODRIGUES, 2008).

Portanto, neste capítulo será feita uma análise histórica, artística e matemática de duas das principais obras que depreendem de Da Vinci, ou seja, Mona Lisa e Homem Vitruviano.

6.1- Mona lisa

6.1.1- Perspectiva histórica

De acordo com Ajzenberg (2019), Mona Lisa começou a ser pintada por Da Vinci no ano de 1503 em Florença, porém em função da minuciosidade e dos detalhamentos da obra, a pintura continuou a ser realizada em Milão, Roma e França, ou seja, este trabalho o acompanhou até sua morte.

O objetivo principal e inicial da pintura era a realização de um retrato da esposa de Francesco del Giocondo, um rico e importante comerciante de seda da cidade de Florença (SÁ E CARVALHO, 2016).

De acordo com o livro “O Código da Vinci”⁷, atualmente, a pintura original que mede cerca de 77 cm por 53 cm de Mona Lisa se encontra no Museu do Louvre na França, e graças a sua beleza é responsável por atrair um elevado público.

⁷ “Todas as descrições de obras de arte, arquitetura, documentos e rituais secretos neste romance correspondem rigorosamente com à realidade.” (Código da Vinci, p. 9)

É relevante compreender, também, a relação existente entre o valor histórico e o comercial, já que a priori a pintura de Mona Lisa tinha um valor comercial razoável, porém conforme a ascensão de Da Vinci, ao longo dos anos, o valor histórico se elevou consideravelmente acarretando em um enorme crescimento no valor comercial.

6.1.2 – Perspectiva artística

Para analisar a obra Mona Lisa (figura 15) é necessário compreender que a mesma é composta por dois planos, o primeiro engloba a figura da esposa do comerciante, ou seja, o plano principal e em destaque enquanto o segundo trata-se de uma paisagem, sendo um plano de fundo (SÁ E CARVALHO, 2016).

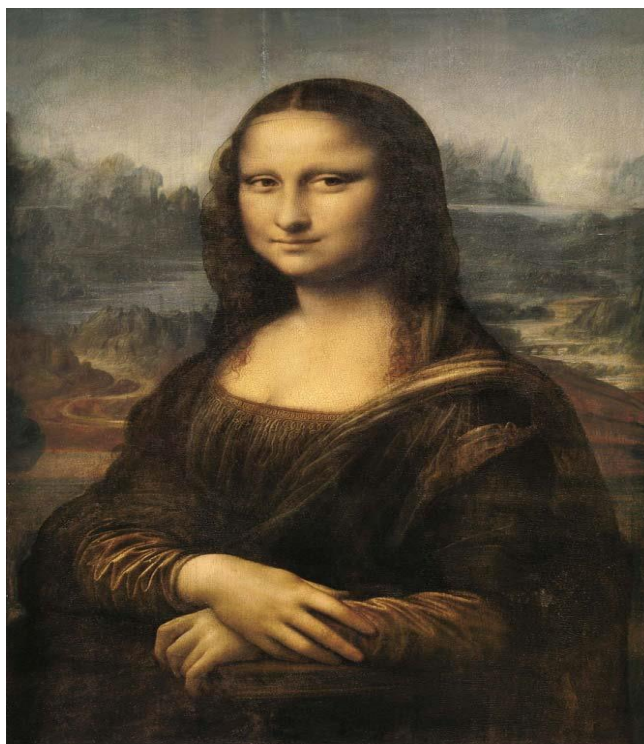


Figura 15: Mona Lisa

Fonte: <https://cdn.britannica.com/24/189624-050-F3C5BAA9/Mona-Lisa-oil-wood-panel-Leonardo-da.jpg>

A fim de realizar uma análise do primeiro plano,

[...] transformou-se em minucioso estudo técnico-científico de claro-escuro e, principalmente, em complexo aprofundamento das emoções humanas, imortalizadas no famoso sorriso. Conecta a natureza humana a um universo maior e estabelece interfaces [...] (AJZENBERG, 2019, p. 137)

Outra perspectiva relevante a ser analisada, em concordância com Alzenberg (2019), está relacionada ao uso da “perspectiva complexa”, por Leonardo, na qual além de quem contempla a pintura aparentar estar sendo observada pela Mona Lisa, a obra transmite uma ideia de movimento e expressa diversas emoções.

Para realizar uma análise do segundo plano,

(...) a paisagem estende-se às montanhas geladas, e inclui caminhos ondulantes e uma ponte que dão indicação de presença humana. Os contornos desfocados, a figura graciosa, os contrastes dramáticos entre claro e escuro que se traduzem em serenidade são característicos do estilo de Leonardo. A pintura foi um dos primeiros retratos a descrever o modelo no seio de uma paisagem imaginária. Uma característica interessante da paisagem é a sua desigualdade. (SÁ E CARVALHO, 2016, p. 3).

É possível através da análise do segundo plano observar o uso de técnicas de Da Vinci, que variam não só no uso do claro-escuro e luz e sombra, como também na aparência desfocada que foi produzida por uma importante técnica desenvolvida por ele, o “sfumato”, ou esfumado, capaz de gerar o aspecto turvo (AJZENBERG, 2019).

6.1.3- Análise matemática

Na obra Mona Lisa um dos recursos matemáticos utilizados por Da Vinci foi à razão áurea, capaz de garantir proporcionalidade, beleza e harmonia para a obra (ANASTÁCIO, 2015). De acordo com Lauro (2005), foi Leonardo quem nomeou a Proporção Áurea de Divina Proporção.

Em Mona Lisa, a secção áurea está presente em alguns aspectos (Figura 16), como,

(a) desenhando um retângulo à volta da face o retângulo resultante é um retângulo de Ouro; (b) dividindo este retângulo por uma linha que passe nos olhos, o novo retângulo obtido também é de Ouro e (c) as dimensões do quadro também representam a razão de Ouro. (LIMA, 2015, p. 25).

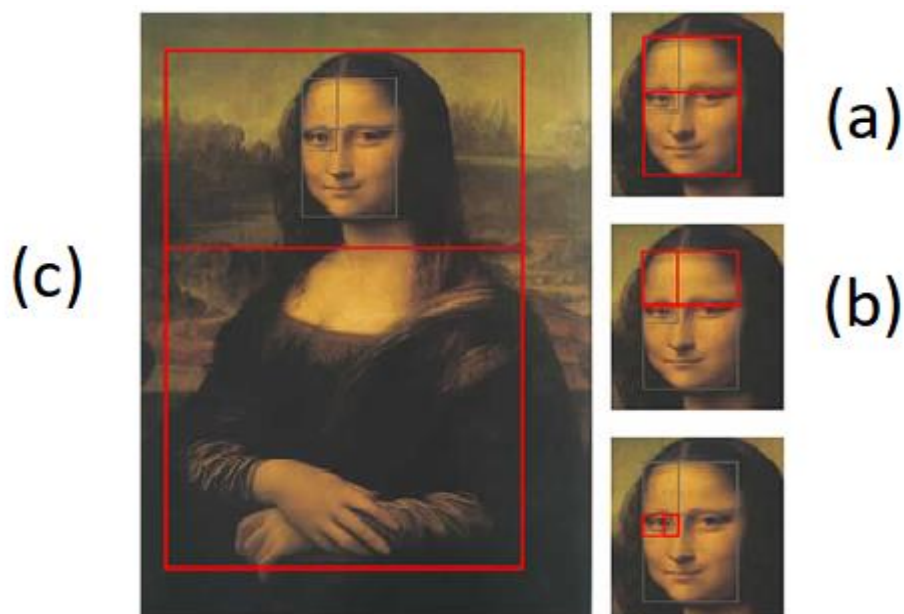


Figura 16: Mona Lisa e a Proporção Divina

Fonte: prop-aurea-04.png (800×531) (wordpress.com)

Além de ser observado o retângulo áureo na pintura, e a partir dessa análise ser verificada a presença da razão áurea, essa comprovação pode ser feita através de outro recurso, já citado nesse trabalho, a espiral logarítmica (figura 17).

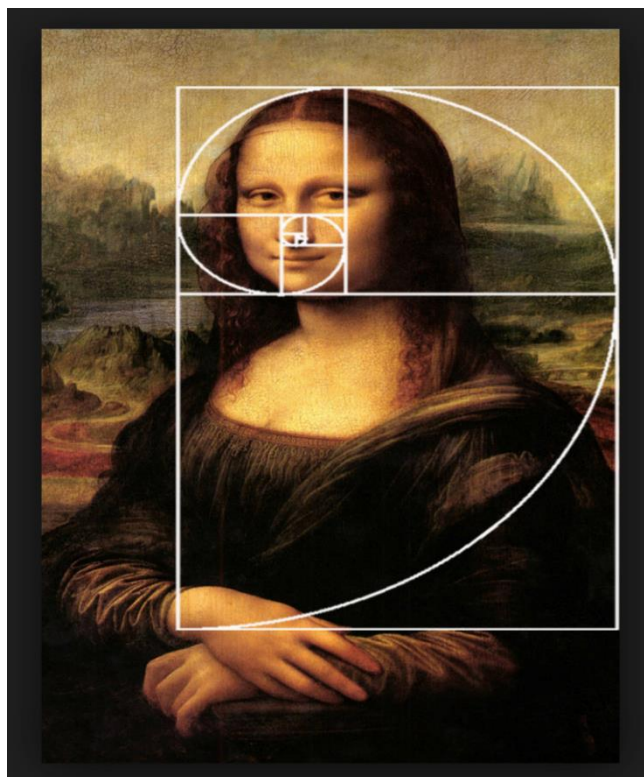


Figura 17: Mona Lisa e a Espiral Logarítmica

Fonte: Screen-Shot-2019-05-18-at-11.58.14-AM.png (844×1326) (lucidlandscape.com)

Apesar de existirem diversos artifícios matemáticos e gráficos que comprovem a presença da razão áurea no quadro, ainda existem movimentos que desmentem a presença da mesma, visto que, faltariam comprovações científicas sobre a disposição do retângulo áureo na obra (LÍVIO, 2006).

6.2- Homem Vitruviano

6.2.1- Perspectiva histórica

Em concordância com Piazza M. (2012), o Homem Vitruviano foi desenhado por Leonardo da Vinci em 1492. Sendo considerado o início dos estudos de da Vinci no que se diz respeito à anatomia do corpo humano (QUEIROZ, 2007).

O Homem Vitruviano foi uma representação de um estudo já realizado por Marcus Vitruvius Pollio⁸, e de acordo com Anastácio e Ferreira (2015, p. 9) “O desenho foi proposto por Marcus Vitruvius Pollio em sua obra Os Dez Livros da Arquitetura no século I a. C.”.

É importante compreender a importância da obra de arte de Da Vinci, já que a mesma realiza estudos da anatomia do corpo humano através de recursos matemáticos, trazendo inovações científicas para o contexto em que foi criada que se permeou até a atualidade.

Através do desenho do Homem Vitruviano é possível observar relevantes características do Renascimento, como por exemplo, o antropocentrismo configurado através da presença do homem como peça central na composição e o humanismo capaz de refletir o conhecimento científico do homem.

6.2.2 – Perspectiva artística

O Homem Vitruviano é uma construção geométrica, com a figura humana dentro do círculo inscrita no quadrado (figura 18) (SILVA E PEREIRA, 2019). Um aspecto a ser analisado é o material e a técnica utilizados, em concordância com Ajzenberg (2019, p. 127) “Utilizou ponta metálica, com efeito de uma gravura em água-forte.”.

⁸ Marcus Vitruvius Pollio (80 - 15 a.C.) foi um importante arquiteto e engenheiro militar (GOMES E SANTOS, 2009)

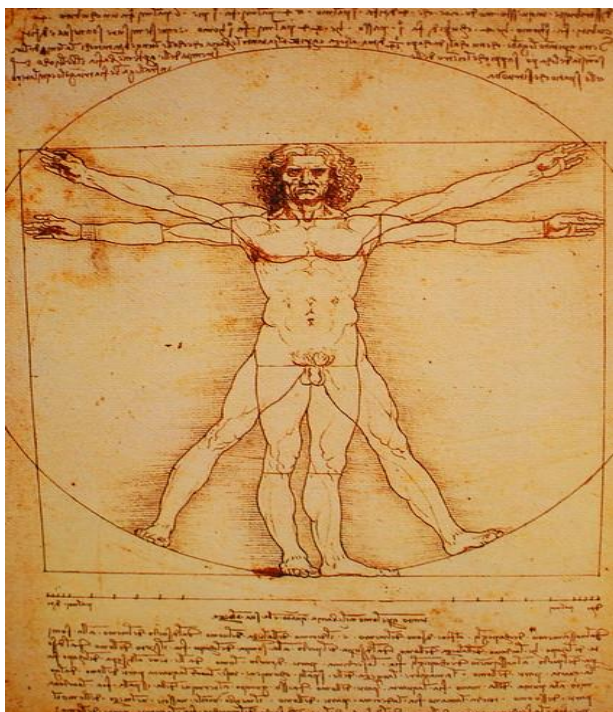


Figura 18: Homem Vitruviano

Fonte: homem-vitruviano.jpg (426×640) (jornaljoca.com.br)

Fazendo uma análise da sobreposição do desenho de um homem sobre o desenho de outro, de acordo com Brum e Schuhmacher (2013, p. 6) “Isto ilustra o princípio de que, na mudança entre as duas posições, o centro aparente da figura parece se mover, mas de fato o umbigo da figura, que é o verdadeiro centro de gravidade, permanece imóvel.”, assim como na pintura de Mona Lisa, Da Vinci reproduz uma ideia de movimento no Homem Vitruviano.

Outra análise artística que pode ser, também, realizada é a relação microcosmo homem e o macrocosmo universo, no qual o microcosmo estaria inserido no macrocosmo, ou seja, a imersão do ser humano no universo (AJZENBERG, 2019).

6.2.3- Análise matemática

O primeiro aspecto matemático a ser analisado é a presença de elementos da geometria plana, sendo eles, o círculo e o quadrado, e de acordo com Anastácio (2015, p. 9) “Para a inscrição no quadrado, a altura do corpo deveria ser igual ao comprimento dos braços abertos. Para o círculo os braços deveriam estar abertos na altura do crânio e as pernas abertas o deveriam tocá-lo.”, ou seja, o desenho é matematicamente calculado afim de que possa acarretar em um visual harmônico.

É possível, a partir da medida do corpo humano encontrar padrões matemáticos que acarretam na razão áurea (figura 19),

Na razão entre a altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo, na razão entre a altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça, na razão entre a medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax, na razão entre a medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até o chão, na razão entre a medida do ombro à ponta do dedo e a medida central até a ponta, na razão entre a medida do cotovelo até o pulso e a medida do seu pé, entre outros. Segundo especialistas da área da beleza estética, uma orelha perfeita seria aquela que se encaixaria em uma espiral logarítmica, mas precisamente a espiral áurea, que é um caso particular. (LIMA, 2015, p. 26).

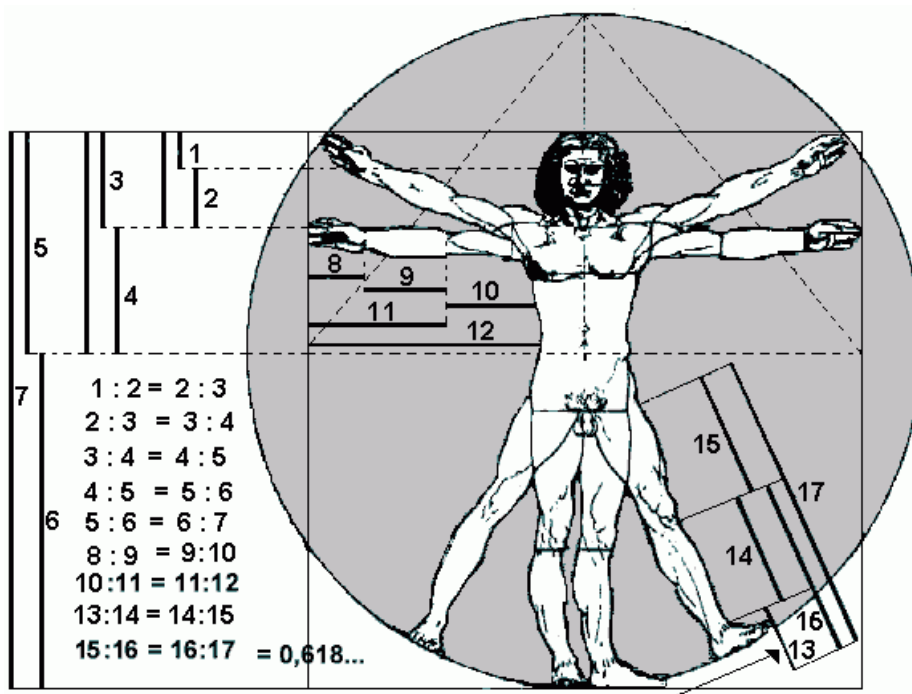


Figura 19: Homem Vitruviano e a Proporção Áurea

Fonte: Leonardo Da Vinci: El hombre de vitrubio (leonardodavinci-vida.blogspot.com)

Além das medidas do corpo humano é possível observar a presença da razão áurea através de outro recurso já estudado neste trabalho, sendo ele o pentágono regular (figura 20) (BELUSSI, GERALDINI e PRADO, 2013).

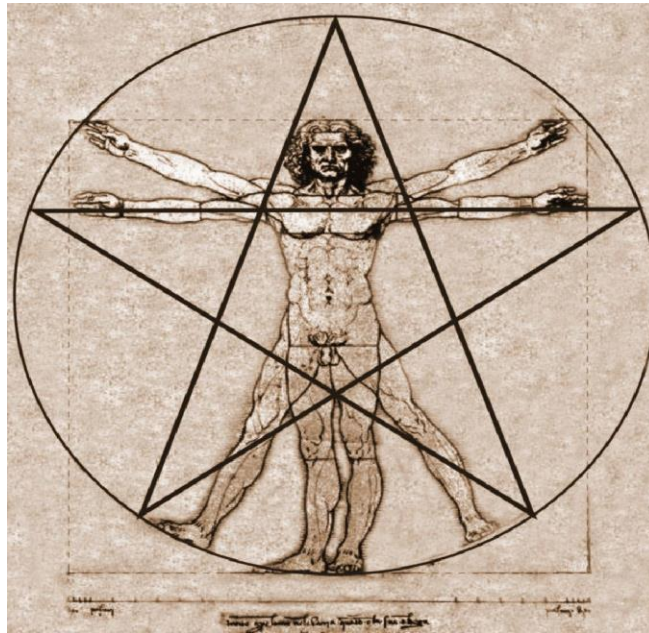


Figura 20: Homem Vitruviano e o Pentágono Regular

Fonte: 3db17478d679101d77ac7fa9fbab0c21.jpg (938×1047) (pinimg.com)

6.3- A proporção áurea e a padronização da beleza

Através das duas obras de Leonardo Da Vinci é possível observar uma relação entre a beleza, o corpo humano e a padronização estética.

Na obra de Mona Lisa é possível à observação do retângulo áurea implicitamente na pintura, este quadrilátero é capaz de causar impactos, em função de sua beleza, proporcionalidade e harmonia (SANTARELLI, 2016). Dessa forma, pode-se atribuir a capacidade de atrair grande público, para a divina proporção que garante perfeição e a padronização do belo.

Já no Homem Vitruviano é possível compreender a relação entre um corpo humano perfeito e a padronização do belo, ou seja, o corpo atingiria sua perfeição se o mesmo

possuísse as medidas propostas pelo Homem Vitruviano que acarretam na proporção divina (SANTARELLI, 2016).

Porém, é importante compreender que o conceito de beleza é estritamente relativo, em que ele pode variar do ponto de vista em diferentes culturas, ou seja, apesar da proporção áurea transmitir uma ideia de beleza para muitos, ela não é universal (MENDIAS, 2005).

7- CONCLUSÃO

A proporção áurea é uma importante ferramenta matemática capaz de garantir beleza, harmonia e proporcionalidade. Contudo, os estudos a respeito dessa razão ainda não são amplamente estudados por diversos investigadores científicos, provando que na maioria das vezes, a pesquisa não explora a grandeza e riqueza da secção áurea, como uma ferramenta significativa.

Nesse sentido, este trabalho trouxe de forma clara: a perspectiva histórica da proporção áurea que se iniciou desde os tempos primórdios com a sociedade egípcia e se permeou até os dias atuais, os diversos recursos matemáticos possíveis para se chegar ao número de ouro, além de revelar a significativa presença da divina proporção em um notável instrumento cultural: as artes plásticas.

Portanto, o trabalho apresentado procura compreender as necessidades das realizações de estudos a respeito da razão áurea, visto que além da mesma deter conhecimentos científicos suficientemente ricos e necessários, a secção áurea, também, é atemporal e flexível, pois ela se adapta conforme a descoberta de novas áreas de estudos, ora humanísticas, ora biológicas e tecnológicas revelando ainda mais a necessidade da pesquisa que ocasionam no avanço dos conhecimentos científicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AJZENBERG, E. Da Vinci e a busca do conhecimento. **Revista USP**, n. 122, p. 122-140, 2019. Disponível em: <https://www.revistas.usp.br/revusp/article/download/162625/156462>. Acesso em: 05/03/2021.
- [2] ANASTÁCIO, L. R. **Razão áurea: um rico tesouro de surpresas**. Minas Gerais: UFSJ, 2015. Disponível em: <https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Liliane%20Rezende%20Anastacio.pdf>. Acesso em: 24/11/2019.
- [3] ARTY, D. **Proporção Áurea: Guia sobre a Proporção Áurea no Design**. Disponível em: <https://www.chiefdesign.com.br/proporcao-aurea/>. Acesso em: 13/02/2020
- [4] BARRETO, M. M. **A razão áurea aplicada ao desenvolvimento do logotipo: uma análise das 5 marcas mais valiosas do ano de 2018**. Passo fundo: UPF, 2018. Disponível em: <http://repositorio.upf.br/bitstream/riupf/1578/1/PF2018Marcelo%20Martins%20Barreto.pdf>. Acesso em: 24/04/2020.
- [5] BARROS, J. D. A.. Arte é coisa mental: reflexões sobre o pensamento de Leonardo da Vinci sobre a arte. **Revista Poiésis**, n. 11, p. 71-82, 2008. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Jose_Barros33/publication/321016636_Arte_e_Coisa_Mental_-_reflexoes_sobre_o_pensamento_de_Leonardo_da_Vinci_sobre_a_Arte/links/5a07e3aca6fdcc65eab3bbb1/Arte-e-Coisa-Mental-reflexoes-sobre-o-pensamento-de-Leonardo-da-Vinci-sobre-a-Arte.pdf. Acesso em: 05/03/2021.
- [6] BELUSSI, G. M.; GERALDINI D. A.; PRADO E. A. **Número de ouro**. Londrina: UEL, 2013. Disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/read/12709161/numero-de-ouro-departamento-de-matematica-universidade->. Acesso em: 24/04/2020.
- [7] BORGES, C. R. L. O DESENHO E O PROCESSO CRIATIVO DE LEONARDO DA VINCI. **Revista do Curso de Arquitetura e Urbanismo da UCB**, v. 1, n. 1, 2014. Disponível em: <https://portalrevistas.ucb.br/index.php/CAU/article/view/5415> . Acesso em: 05/03/2021.
- [8] BRANDÃO, A. C. P. **A razão áurea diante de nossos olhos**. São Paulo: UPM, 2019. Disponível em: <http://168.197.92.160/bitstream/handle/10899/20060/ANA%20CAROLINA%20PICARELLI.pdf?sequence=1&isAllowed=y> . Acesso em: 24/04/2020.
- [9] BRUM, W. P.; SCHUHMACHER E.. Conceitos Geométricos Explorados no Ensino de Matemática por Meio da Exposição de Obras de Leonardo da Vinci. **Revista Dynamis**, v.

19, n. 1, p. 69-83, 2013. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Elcio_Schuhmacher/publication/272872305_Conceitos_Geometricos_Explorados_no_Ensino_de_Matematica_por_Meio_da_Exposicao_de_Obras_de_Leonardo_da_Vinci/links/5739e08608ae9ace840db59f/Conceitos-Geometricos-Explorados-no-Ensino-de-Matematica-por-Meio-da-Exposicao-de-Obras-de-Leonardo-da-Vinci.pdf>. Acesso em: 05/03/2021.

[10] CLUBE DA MATEMÁTICA. Disseminando o estudo da matemática [s.d.]. Página inicial. Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-a-razao-aurea/>>. Acesso em: 24/11/2019.

[11] COSTA, E. A. **A beleza pela (na) matemática**. Goiânia, 2008. Disponível em: <<http://seer.pucgoias.edu.br/index.php/estudos/article/view/641/497>>. Acesso em: 24/04/2020.

[12] FONSECA, M. J. M. Leonardo da Vinci: um génio universal. **Millenium**, 1997. Disponível em: <<http://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/675>>. Acesso em: 05/03/2021.

[13] FRAZÃO, D. Biografia de Leonardo da Vinci. 2019. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/leonardo_vinci/>. Acesso em: 16/02/2020

[14] GOMES, I. T.; SANTOS, M. S. P.. Leonardo da Vinci, o “Homem Vitruviano” e a Anatomia. **Revista Científica Eletrônica de Medicina Veterinária**, 2009. Disponível: <http://www.fauf.revista.inf.br/imagens_arquivos/arquivos_destaque/jEAOJk3nIXmb5bM_2013-6-24-17-42-48.pdf>. Acesso em: 05/03/2021.

[15] HENSCHER, C. J. ; BAIER T. Razão áurea da antiguidade grega: no século X: na música, no design e na arquitetura. In: 15º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, 2016, Florianópolis. **Anais Eletrônicos**. Disponível em: <https://www.15snhct.sbhct.org.br/resources/anais/12/1473882675_ARQUIVO_RAZAOAUREADAANTIGUIDADEGREGAAOSECULOXX.pdf>. Acesso em: 24/11/2019.

[16] HISTÓRIA DO MUNDO. Grandes Monumentos do Egito - História dos Grandes Monumentos do Egito. Disponível em: <<https://www.historiadomundo.com.br/egipcia/grandes-monumentos-do-egito.htm>>. Acesso em: 24/04/2020.

[17] INSTITUTO DE ENGENHARIA. Você sabe o que é a proporção áurea?, 2015. Página Inicial. Disponível em: <<https://www.institutodeengenharia.org.br/site/2015/07/31/voce-sabe-o-que-e-a-proporcao-aurea/>>. Acesso em: 24/11/2019

[18] LEVY, J. Mathematics: a curious history. From early concepts to chaos theory. London: Carlton Published Group, 2018.

[19] LIMA, J. A. F. **Razão áurea: história e suas aplicações matemática**. Maranguape: UFC, 2015. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/35810/1/2015_tcc_jafdlima.pdf>. Acesso em: 24/04/2020.

[20] LÍVIO, M. Razão áurea: A história de FI, um número surpreendente. Editora Record: Rio de Janeiro, São Paulo, 2006.

[21] MENDIAS L., M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. **Exacta**, 2005. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=81000304>>. Acesso em: 16/02/2020

[22] MOREIRA, R. L. S.; SANTOS G. O. A sequência de Fibonacci e a razão áurea. In: VII Encontro Nacional das Licenciaturas, VI Seminário do PIBID e I Seminário do Residência Pedagógica, 2018, Fortaleza. Editora Realize, 2018. Disponível em: <<http://editorarealize.com.br/revistas/enalic/trabalhos/443-55247-25112018-153746.pdf>>. Acesso em: 24/11/2019.

[23] OLIVEIRA, E. A. G.; NASCIMENTO R. A.; NEVES A. F. A geometrização em sistemas de identidade visual. In: XXI Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e X International Conference on Graphics for Arts and Design, 2013, Florianópolis. **Anais Tecnologia e Arte para Inovação**. Florianópolis: Editora do CCE (Universidade Federal de Santa Catarina), 2013. Disponível em: <<http://wright.ava.ufsc.br/~grupohipermidia/graphica2013/trabalhos/A%20GEOMETRIZA%20EM%20SISTEMAS%20DE%20IDENTIDADE%20VISUAL.pdf>>. Acesso em: 24/11/2019.

[24] PIAZZA, M. J.. O Anatomista Leonardo Da Vinci. **Femina**, v. 40, n. 2, p. 60, 2012. Disponível em: <<http://files.bvs.br/upload/S/0100-7254/2012/v40n2/a3093.pdf>>. Acesso em: 05/03/2021.

[25] QUEIROZ, R. M. **Razão áurea: a beleza de uma razão surpreendente**. Londrina: UEL, 2007. Disponível em: <<http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf>>. Acesso em: 24/11/2019.

[26] SÁ, M.; CARVALHO, Q. S. **A Reconstrução de Monalisa na Era Digital**. XXIII Prêmio Expocom, 2016. Disponível em: <<https://www.portalintercom.org.br/anais/norte2016/expocom/EX49-0198-1.pdf>>. Acesso em: 05/03/2021.

[27] SANGSTER, A.; SCATAGLINIBELGHITAR, G. **Luca Pacioli: The Father of Accounting Education**. Reino Unido, 2010. Disponível em:

<[https://www.researchgate.net/publication/227600560 Luca Pacioli The Father of Accounting Education](https://www.researchgate.net/publication/227600560_Luca_Pacioli_The_Father_of_Accounting_Education)>. Acesso em: 24/04/2020.

[28] SANTARELLI, C. P. G. **Juventude, Envelhecimento, (Im)perfeição e Consumo**. In: Congresso Internacional Comunicação e Consumo, 2016, São Paulo. Disponível em: <http://anais-comunicon2016.espm.br/GTs/GTPOS/GT6/GT06-CHRISTIANE_SANTARELLI.pdf>. Acesso em: 24/11/2019.

[20] SANTOS, E. R. M.; CARDOSO, L. V. M.; SILVA, J. S. C. Burity: Relação entre sequência de Fibonacci, razão áurea e espiral logarítmica. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2012, Fortaleza. Disponível em: <http://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/200/submission/director/200.pdf>>. Acesso em: 24/04/2020.

[30] SILVA, A. S.; PEREIRA, A. C. C.. LEONARDO DA VINCI E LUCA PACIOLI. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 6, n. 17, p. 71-83, 2019. Disponível em: <<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/1482>>. Acesso em: 05/03/2021.

[31] SÓ HISTÓRIA. Períodos da História. Disponível em: <<https://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/p2.php>>. Acesso em: 24/04/2020.

[32] TRABATTONI, F. **Platão**. 2012. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=KiHQCwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA5&dq=+quem+foi+plat%C3%A3o+&ots=XJ3ZfUaeDS&sig=cv-eS9PYRS7uNQduBZTxdWBc3i4#v=onepage&q=quem%20foi%20plat%C3%A3o&f=false>>. Acesso em: 24/04/2020.