



Ministério da Saúde

FIOCRUZ

Fundação Oswaldo Cruz



ESCOLA POLITÉCNICA DE SAÚDE
JOAQUIM VENÂNCIO

Jairton Henrique Oliveira

DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA FRACTAL: Histórico, conceitos e dimensão

Rio de Janeiro

2018

Jairton Henrique Oliveira

DESENVOLVIMENTO DA GEOMETRIA FRACTAL: Histórico, conceitos e dimensão

Projeto de monografia apresentado à Escola Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio – Fundação Oswaldo Cruz (EPSJV-Fiocruz) como requisito parcial para aprovação no Curso Técnico em Gerência em Saúde.

Orientador(a): Felipe Leite Granato

Rio de Janeiro

2018

A matemática é o alfabeto que Deus usou para escrever o universo.

(Galileu Galilei)

RESUMO

Este projeto tem como objetivo realizar um estudo sobre a geometria fractal, situar historicamente essa área e trabalhar os principais conceitos que a constituem. A geometria fractal consiste em uma das geometrias não euclidianas, e foi desenvolvida no século XX pelo matemático Benoît Mandelbrot. Ela surge da sistematização e estudo dos chamados “monstros matemáticos”, figuras que não se adequavam a nenhuma categoria de linhas unidimensionais, bidimensionais e planos tridimensionais (Zanotto, 2015). Devido a ausência de ferramentas teóricas, não poderiam ser estudadas pela geometria euclidiana. Esses “monstros matemáticos” foram nomeados como “fractais”, derivado da palavra latina “fractus”, que significa quebrar, fazendo alusão a dimensão fracionada das figuras. Apesar de não existir uma definição formal e consensual do que seria um fractal, tem-se três características que podem ser devidamente atribuídas a eles, que são autossimilaridade, iteração e dimensão não-inteira. Autossimilaridade referindo-se a característica de uma parte da figura ser semelhante ao todo, iteração sendo a sua constante repetição infinita e dimensão não-inteira correspondendo a propriedade dos fractais de possuírem uma dimensão fracionada. (Zanotto, 2015; Rabay 2013)

Palavras-chave: Fractal, geometria euclidiana, geometria não euclidiana

Lista de figuras

Figura 1. Sólidos de Platão associados a elementos da natureza.....	11
Figura 2. Proposição dois.....	15
Figura 3. Retas não paralelas cortadas por uma transversal.....	16
Figura 4. Disco de Poincaré- analogia para geometria hiperbólica de Lobachevsky.....	19
Figura 5. Representação da geometria de Riemann.....	20
Figura 6. Curva de Weierstrass.....	22
Figura 7. O conjunto de Cantor trabalha com a fragmentação do intervalo fechado $[0, 1]$	23
Figura 8. Curva de Peano.....	23
Figura 9. Curva de Von Koch.....	24
Figura 10. Derivação da curva de Von Koch, conhecida como floco de neve de Koch.....	25
Figura 11. Conjunto de Julia.....	26
Figura 12. Benoit Mandelbrot.....	27
Figura 13. Exemplo de autossimilaridade aproximada.....	31
Figura 14. Exemplo de autossimilaridade exata.....	32
Figura 15. Construção do triângulo de Sierpinski.....	32
Figura 16. 4 iterações da curva de Koch.....	35
Figura 17. Curva de Peano com três iterações.....	36
Figura 18 . Cinco iterações do triângulo de Sierpinski.....	37
Figura 19 . 3 iterações do tapete de sierpinski.....	38
Figura 20. 3 iterações da esponja de Menger.....	39

Figura 21. Acima: Primeiras iterações da árvore pitagórica, Abaixo: Uma árvore pitagórica.

depois de inúmeras iterações (a esquerda) e representação artística da árvore pitagórica (a direita)

40

Figura 22. Duas iterações do pentagonal de Dürer.....41

Figura 23. Duas iterações do Hexagonal de Dürer.....41

Figura 24. Exemplo de fractal por expansão.....42

Figura 25. Conjunto de Mandelbrot.....43

Figura 26. Segmento de reta.....45

Figura 27. Quadrado dividido em 9.....46

Figura 28. Cubo dividido em 27.....46

Figura 29. Construção da curva de Koch.....47

Figura 30. Primeira fase da construção do triângulo de Sierpinski.....48

Figura 31. Iterações do conjunto de Cantor, cada segmento de reta possui um terço do valor do trecho que o originou.....48

Figura 32. Curva de Peano.....49

Figura 33. Esponja de Menger.....49

Figura 34. Primeiras iterações do tapete de Sierpinski.....50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	07
1-Histórico da geometria fractal	08
1.1- Euclides e os Elementos.....	09
1.1.1- Conteúdo e organização dos livros.....	10
1.1.2- O emprego do método dedutivo.....	12
1.1.3- a problemática do quinto postulado.....	16
1.2- surgimento das geometrias não euclidianas.....	17
1.3- Geometria euclidiana e natureza.....	20
1.4- Os “Monstros matemáticos”.....	22
1.5- Geometria fractal.....	26
1.6- Algumas aplicações da geometria fractal.....	28
2- Geomtria fractal: Conceitos e exemplos.....	29
2.1- O que é um fractal.....	30
2.1.1- Autossimilaridade.....	30
2.1.2- Iteração.....	32

2.1.3- Dimensão fractal.....	33
2.2-Alguns fractais e suas construções.....	33
2.3- Fractais pela fronteira.....	34
2.3.1- Curva de Koch.....	34
2.3.2- Curva de Peano.....	35
2.4- Fractais por remoção.....	36
2.4.1- Construção do triângulo de Sierpinski.....	36
2.4.2- Tapete de Sierpinski.....	37
2.4.3- Esponja de Menger.....	38
2.5- Fractais tipo árvore.....	39
2.5.1- Árvore pitagórica.....	39
2.6- Fractais do tipo Dürer.....	40
2.6.1- Dürer pentagonal.....	40
2.7- Fractais por expansão.....	41
2.7- Fractais algébricos.....	41
2.7.1- Conjunto de Mandelbrot.....	42
3- Dimensão fractal.....	44
3.1- O conceito de dimensão fractal.....	44
3.2- Dimensão fractal ou de Hausdorff.....	45
3.3- Dimensão de alguns fractais clássicos.....	47
4- Conclusão.....	50
5- Referências bibliográficas.....	53

1 INTRODUÇÃO

O primeiro capítulo deste trabalho terá por objetivo apresentar uma breve história da geometria, iniciando com as noções mostrada sobre suas origens e culminando nos fractais. Será discutida a geometria na Grécia com Euclides e sua obra “Os Elementos”, passando para a problemática do quinto postulado e o surgimento das geometrias não Euclidianas, como a elíptica e hiperbólica. Por fim, será brevemente tratada a ineficiência da geometria Euclidiana para a representação e modelagem de elementos e fenômenos da natureza, depois será abordado o estudo dos “monstros matemáticos” e o surgimento da geometria fractal no século XXI por Benoit Mandelbrot.

No capítulo 2 será desenvolvidas as características que definem um fractal, como autossimilaridade, iteração e dimensão fracionada. Essa última característica será comentada muito brevemente, pois, dado sua importância, será dedicada um capítulo especialmente para ela. Em seguida, serão construídos diferentes fractais, incluindo alguns clássicos mencionados no capítulo um.

No capítulo 3 será desenvolvido o conceito de dimensão fractal, apresentaremos e demonstraremos uma das formas de calcular a dimensão de um fractal. Em seguida, utilizando a fórmula demonstrada, será aplicado para calcular a dimensão de alguns dos fractais exibidos no capítulo 2.

CAPÍTULO 1-HISTÓRICO DA GEMETRIA FRACTAL

O homem relaciona-se com as formas geométricas desde o início da sua história, pois, sempre teve a necessidade de se relacionar com a natureza, e geometria e natureza estão intimamente ligadas. Na história da humanidade nota-se essa necessidade em diferentes áreas como na arte, artesanato, na fabricação de armas e etc. Há uma grande problemática no que tange a origem da geometria. Devido à escassez de fontes históricas, o mais razoável a se afirmar é que essa área do conhecimento manifestou-se de diferentes formas nas antigas civilizações. No entanto, o registro mais antigo que se tem notícia é o do Papiro de Rhind, em que se sugere a origem da matemática egípcia. (Gomes, 2010; Roque, 2012). Em Gomes (2010) temos:

As origens de qualquer ciência estão repletas de incertezas ou da impossibilidade de datações precisas, devido a própria história da humanidade e do longo período em que registros escritos não existiam- até seis milênios atrás. (Gomes, 2010, p. 29)

A origem da matemática egípcia está intimamente ligada ao desenvolvimento da agricultura. A plantação era extremamente dependente do ciclo do rio Nilo, pois suas cheias, que ocorriam entre os meses de julho e de outubro, levavam os nutrientes para a terra que era essencial para sua fertilidade. Nesse contexto surgem os chamados “puxadores de corda” ou “harpedonaptas”: homens que tinham a incumbência de refazer as demarcações na terra para a partição igualitária dos lotes entre os agricultores. E este serviço era constantemente refeito, pois as inundações sempre dissipavam as marcações preexistentes. Os egípcios utilizavam o triângulo retângulo de lados 3, 4, 5, a fim de formar os retângulos correspondentes às áreas demandadas. A ideia partia do fato desse triângulo ser uma unidade da área dos terrenos retangulares dos agricultores, dessa forma seria mais simples realizar as medições exigidas. (Filho, 2015; Roque, 2012). Ainda sobre a origem da geometria e sua relação com a agricultura, Roque afirma (2015):

A palavra “geometria” pode ser traduzida, portanto, como “medida da terra”. Vem daí a ideia que seu surgimento está ligado à agrimensura. “A correlação entre matemática, números, equilíbrio e justiça, entre direito e cálculo, era lugar comum nas sociedades antigas”,

afirma o historiador da matemática grega Bernard Vitrac. (Roque, 2012, p. 93)

Não há consenso sobre quando ou quem teria levado os conhecimentos geométricos do Egito para a Grécia. Todavia, foi na Grécia que essa área do conhecimento obteve uma forma particular. A geometria como ciência dedutiva foi consolidada na Grécia, pelo esforço de matemáticos como Tales de Mileto, Pitágoras e Eudoxio (Filho, 2015; Roque 2012).

Apesar de toda a problemática envolvendo o início da geometria Grega, suas origens se encontrariam nas escolas Jônicas e pitagóricas. Um dos matemáticos gregos de maior destaque para o presente trabalho foi Euclides de Alexandria (360-295A. C.). (Gomes, 2010)

1.1-Euclides e “Os Elementos”

Euclides de Alexandria foi um matemático grego que muitas vezes foi referido como “Pai da geometria”. As informações sobre sua vida são escassas, os fatos conhecidos derivam apenas de outros autores que escreveram sobre ele. Um desses autores, o filósofo Grego Próclus do século V D.C escreveu que Euclides lecionava em Alexandria na época de Ptolomeu I Soter, governador do Egito entre 323 A.C e 285 a.C.Nasceu na Síria, provavelmente em 330 A.C e estudou em Atenas. Foi matemático da escola platônica, e ganhou notoriedade devido as suas contribuições a matemática e pela sua obra “Os Elementos”, que é constituída por 13 livros. (Filho, 2015)

A obra “Os Elementos” consiste em um trabalho que foi voltado para sistematização e demonstração do conhecimento matemático da época e para o desenvolvimento de novos conhecimentos. No entanto, é difícil identificar teoremas que tenham sido elaborados ou demonstrados pelo próprio Euclides, visto que muitos dos teoremas já haviam sido produzidos e eram do conhecimento de muitos matemáticos de sua época. (Filho, 2015; Roque 2012). Filho (2015, p.33) afirma sobre Euclides e “Os elementos”: “Compilou nos elementos toda geometria conhecida da época. Mas não se limitou a reunir todo conhecimento geométrico, ordenou-o e estruturou-o como ciência.”.

1.1.1-Conteúdo e organização dos livros

Os últimos estudos na área da história da matemática vêm trazendo descobertas em relação à organização dos livros de “Os elementos”. Existem muitas evidências que corroboram que a obra não é organizada de modo cronológico. Isto é, os resultados encontrados nos primeiros livros não são necessariamente os mais antigos. Segundo Roque (2012):

Acredita-se que os livros VII a IX – os livros aritméticos de “Os elementos”, atribuídos aos pitagóricos – sejam os mais antigos. Os livros II, III e IV não apresentam uma ordem sequencial tão nítida quanto a dos livros I, V e VI, o que pode indicar que aqueles sejam anteriores a esses. Além disso, nos livros I a IV, as construções e provas são realizadas por métodos de congruência e pelo cálculo de áreas e não empregam razões e proporções, que já eram conhecidas muito antes de Euclides. Isso poderia ser um indício de que eles teriam sido escritos depois da descoberta dos incomensuráveis, que demandou uma nova teoria de razões e proporções. (ROQUE, P.164, 2012)

A obra completa é composta por 13 volumes ou capítulos. Sendo os 6 primeiros dedicados a geometria plana, e os demais abordando a teoria dos números, dos incomensuráveis e a geometria espacial. O primeiro livro começa apresentando uma série de definições, postulados e noções comuns e que serão mostradas e comentadas mais a frente nesse capítulo. Fato interessante e que se destaca em “Os elementos” é que com apenas cinco postulados deduziu-se 465 proposições. (Santos, 2011)

O capítulo V aborda a teoria das proporções, mas apenas na sua forma essencialmente geométrica. O capítulo VI apresenta e trabalha com as semelhanças de figuras planas, como por exemplo, os conhecidos critérios de semelhança de triângulos. Ainda nesse há outra abordagem sobre o teorema de Pitágoras e a razão áurea, agora trabalhada como razões de grandezas.

Do capítulo VII ao IX o autor trata da teoria dos números. Discorre, por exemplo: A adição de séries geométricas, divisibilidade de inteiros e a prova da irracionalidade da raiz de dois. O capítulo de número 10 é muitas vezes considerado o de maior nível de dificuldade de entendimento, sendo voltado para a classificação dos irracionais quadráticos e suas raízes quadráticas.

Os últimos capítulos, do XI ao XIII, tratam da geometria espacial. Eles visam demonstrar as maneiras de encontrar os volumes de figuras como o prisma, a esfera, o paralelepípedo e a pirâmide. O capítulo é concluído com a prova de que existem somente cinco poliedros de Platão: Icosaedro de faces triangulares, tetraedro de faces triangulares, octaedro de faces quadrangulares, hexaedro de faces quadrangulares, dodecaedro de faces pentagonais (Filho, 2015). A importância desses sólidos era tal que influenciava a sua visão de mundo, pois cada um deles era associado a um elemento da natureza. Platão associava os seus sólidos a elementos que seriam, segundo ele, “os tijolos” do universo, então para cada um dos poliedros ele relacionava um possível elemento da natureza: O cubo a terra, o tetraedro ao fogo, o icosaedro a água, o octaedro ao ar e o dodecaedro ao cosmos. (Dolce e Pompeu, 1995, p.130)

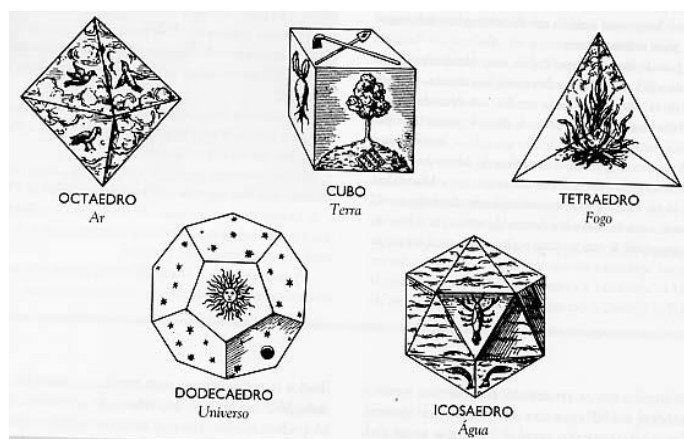


Figura 1: Sólidos de Platão associados a elementos da natureza

Um resumo sobre os conteúdos específicos trabalhados em cada capítulo pode ser encontrado em Roque (2012):

Livro I: Primeiros princípios e geometrias plana de figuras retilíneas: Construção e propriedade de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teoremas “de Pitágoras”.

Livro II: Contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.

Livros III e IV: Propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.

Livro V: Teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas da mesma natureza.

Livro VI: Aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.

Livros VII a IX: Estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.

Livro X: Propriedades e classificação das linhas incomensuráveis

Livros XI e XIII: Geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares. (ROQUE, P.163, 2012)

1.1.2 - O emprego do método dedutivo

Como já mencionado antes, em “Os elementos”, a matemática passa a ter uma configuração singular. Nessa obra que é consolidado o método axiomático-dedutivo na matemática. Os livros são organizados em definições, postulados e noções comuns ou axiomas. Segundo Roque (2012, p.166): “Uma definição é um tipo de hipótese da qual o aprendiz não tem uma noção evidente, mas faz uma concessão àquele que as ensina e aceita-a sem demonstração.”.

Tem-se também a definição de postulado que, segundo Gomes (2010, p.33): “Considera-se postulado uma suposição particular de uma ciência ou área de estudo que não seja necessariamente óbvia ou aceitável, porém verdadeira.”.

Por último tem-se a definição de noção comum. Em Roque encontramos:

Uma noção comum, segundo Proclus, é um enunciado de conteúdo óbvio, tido facilmente como válido pelo aprendiz. Se além de o enunciado ser desconhecido ele é proposto como verdadeiro por meio de alguma argumentação temos um postulado. Neste caso, é necessário que aquele que ensina convença o aprendiz de sua validade. (Roque, p. 167, 2012)

Percebe-se que Proclus realiza uma distinção entre uma noção comum e um postulado. Todavia, é importante ressaltar que atualmente essa distinção não é feita.

Tendo já explanado adequadamente os conceitos de definição, postulado e noção comum, serão mostrados alguns exemplos, de cada um deles, extraídos do texto de Euclides.

Definições:

1-Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza nenhuma.

2-Linha é o que tem comprimento sem largura.

3-As extremidades da linha são pontos.

4-Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre suas extremidades.

5-Superfície é o que tem comprimento e largura.

Postulados:

1-Pede-se, como coisa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta

2-E que uma linha reta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessário.

3-E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo.

4-E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5-E caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

Noções comuns:

1- As coisas, que são iguais a uma terceira, são iguais entre si.

2- Se coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.

3- E se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.

4- E se coisas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.

5- E se de coisas iguais tirarem coisas desiguais, os restos serão desiguais.

Então, partindo dessas definições, postulados e noções comuns Euclides produziu todos os resultados e teoremas pelo método axiomático-dedutivo. Esse método consiste em chegar a um resultado ou verdade partindo de um ou mais axiomas. Isto é, para provar que uma afirmação é verdadeira é necessário demonstrar que ela decorre logicamente de outra que já é tida como verdade. Para Viglione (2011) existem 2 requisitos para uma demonstração correta:

Requisito 1: Aceitar como verdadeiras certas afirmações chamadas “axiomas” ou “postulados”, sem a necessidade de prova.

Requisito 2: Saber como e quando uma afirmação decorre logicamente de outra.(Viglione,P.15, 2011)

Para ficar mais claro como esse método funciona, será exposta aqui uma das demonstrações de Euclides. Na proposição abaixo Euclides quis construir um segmento congruente a um dado por um ponto fora dele.

Proposição 2: De um ponto dado tirar uma reta igual a outra reta dada.

Demonstração:

Seja dado o ponto A, e dada a reta BC. Se deve do ponto A tirar uma linha reta igual à reta dada BC.

Do ponto A para o ponto B tire-se (Post. 1) a reta AB, e sobre esta se faça (Prop 1.1) o triângulo equilátero DAB; e se produzem (Post. 2) as retas AE, BF em direitura das retas DA, DB. Com o centro B e o intervalo BC se descreva (Post. 3) o círculo CGH; e também com o centro D, e o intervalo DG descreva-se o círculo GKL. Sendo o ponto B o centro do círculo CGH, será $BC=BG$ (Def. 15). E sendo D o centro do círculo GKL, será $DL=DG$. Mas as partes DA, DB das retas DL, DG são iguais. Logo, tiradas estas, as partes resíduas AL, BG serão também iguais (Ax. 3). Mas temos demonstrado, que é $BC=BG$. Logo cada uma das duas AL, BC será igual a BG. Mas as coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si. Logo será $AL=BC$; e por consequência temos tirado do ponto A a linha reta AL igual a outra dada BC. (Commandino, 1944)

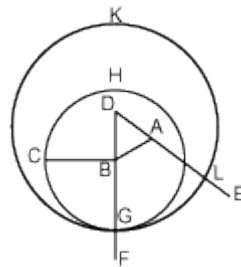


Figura 2: Proposição dois

Por que Euclides escolheu trabalhar com o método dedutivo em suas obras?

A hipótese mais aceita para esse tipo de sistemática é que Euclides já tivesse estabelecido as proposições que queria provar e depois encontrou os princípios que demonstrariam suas proposições. É difícil entender esse tipo de explicação, pois é intuitivo pensar que os princípios vieram primeiro e depois o matemático encontrou as suas implicações. Mas, no caso de “Os Elementos”, possivelmente, os resultados já existiam e era necessário encontrar uma forma de demonstrar sua validade, então o método axiomático dedutivo foi a resposta. Notamos em Roque (2012) como isso se deu:

Os primeiros princípios servem, portanto, à demonstração dos primeiros resultados, que, em seguida, efetuarão o papel de premissas para novas demonstrações. O encadeamento dedutivo das

proposições pode ser compreendido, assim, como a busca de uma espécie de economia na argumentação. (Roque, p.171, 2012)

1.1.3-A problemática do quinto postulado

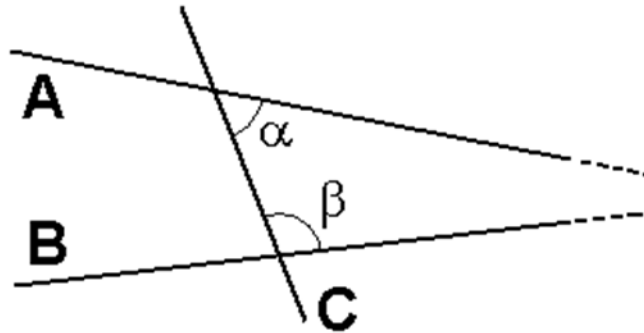


Figura 3: Retas não paralelas cortadas por uma transversal

De todos os postulados o quinto em especial rendeu mais discussões. Este, diferente dos outros, não era tão intuitivo como se esperava de um postulado. Até sua construção escrita era ligeiramente mais longa e mais difícil de interpretar do que os demais. Por tais motivos ele figurava mais como um teorema do que um postulado efetivamente. Ou seja, seria necessário demonstrá-lo.

Para entender o motivo de este postulado ser considerado um teorema ao invés de tal, podemos compará-lo a proposição 17. O quinto postulado afirma que sendo a soma dos ângulos colaterais internos menores que 180° haverá a formação de um triângulo do lado em que isso acontece. Pode-se observar essa situação na figura acima, pois a soma dos ângulos de alpha e beta são menores que 180° e, portanto, as retas A e B irão se intersectar e formar um triângulo.

Continuando o raciocínio, abaixo segue a proposição 17:

Dois ângulos de um triângulo qualquer, tomados de qualquer modo que se quiser, são menores que dois retos. (Commandino, 1944, p.15)

Essa proposição foi demonstrada utilizando os postulados de um a quatro. A parte pertinente é entender que a recíproca dessa proposição é basicamente o conteúdo do postulado cinco. Acima dissemos que o postulado cinco afirma que sendo

os ângulos colaterais internos (Dois ângulos) menores que 180° haverá a formação de um triângulo, e na proposição 17 diz que dois ângulos de um triângulo qualquer são menores que dois retos (Menores que 180°). Concluiu-se, portanto que o postulado cinco necessitaria de demonstração, pois é a recíproca de um teorema.

Nos séculos posteriores houve inúmeras tentativas frustradas de demonstrar o quinto postulado. A primeira delas foi empreendida pelo matemático grego Ptolomeu em sua obra de treze volumes intitulada “Almagesto”, depois matemáticos como o Alemão Gauss (1777-1855) frustraram-se em tentar demonstrar o axioma. No entanto, a partir do século XIX os matemáticos perceberam que a prova do quinto postulado era uma impossibilidade e que, descartando esse postulado poderia haver o surgimento de novas geometrias tão consistentes como a Euclidiana, as chamadas hoje de geometrias não-Euclidianas.

1.2-Surgimento das geometrias não euclidianas

Depois das tentativas frustradas de demonstrar o axioma das paralelas, os matemáticos perceberam que podiam negar o quinto postulado e construir outras geometrias fundamentadas apenas nos quatro primeiros postulados, pois estes não eram problemáticos. Esse contexto é marcado por descobertas simultâneas nas tentativas de demonstrar o quinto postulado, matemáticos como o italiano Saccheri (1667-1733), o Francês Legendre (1752-1833), o Suiço Lambert (1728-1777) e o Húngaro Farkas Bolyai (1775-1856) trabalharam em assuntos semelhantes. (Filho, 2015; Boyer, 1994).

No início do século XIX, o matemático Gauss chegou à conclusão que a demonstração do quinto postulado era uma impossibilidade, no entanto, ele não divulgou o resultado de seus estudos, dessa forma alguns matemáticos ainda dispendiam tempo trabalhando na prova do axioma das paralelas, dentre eles, o mais notório foi Nicolai Lobachevsky (1793-1856). (Boyer, 1994)

Lobachevsky (1792-1856) foi um matemático russo que trabalhou quase toda a sua vida na universidade de Kazan. Ele foi uma das figuras centrais no desenvolvimento das geometrias não-euclidianas, seu impacto foi tão grande que ele é referido como “Copérnico da geometria”, e sua influência ultrapassou os limites da matemática quando seus trabalhos tiveram um impacto direto sobre a filosofia Kantiana. Sobre as descobertas feitas por Lobachevsky, Boyer (1994) afirma:

As ideias revolucionárias de Lobachevsky parecem não lhe ter vindo como inspiração súbita. Numa exposição geral sobre geometria ele escreveu em 1823, presumivelmente para uso em cursos, Lobachevsky disse do postulado de paralelas simplesmente que “nunca foi descoberta uma prova rigorosa de sua validade”. Aparentemente ele então não excluía a possibilidade de ser descoberta uma tal prova. Três anos depois na universidade de Kazan ele leu, em francês, um artigo (agora perdido) sobre os princípios da geometria, inclusive “une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles”. O ano de 1826 em que esse artigo foi lido pode ser tomado como data não-oficial de nascimento da geometria de Lobachevsky, pois foi então que o autor apresentou muitos dos teoremas característicos do novo assunto. Passados mais três anos, no mensageiro de Kazan de 1829, Lobachevsky publicou um artigo, “On the principles of geometry”, que marca oficialmente o nascimento da geometria não-euclidiana. (Boyer, 1994, p.396)

Substituindo o quinto postulado, Lobachevsky, elabora uma hipótese conflitante ao axioma das paralelas. Ele diz que em um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta paralela a AB. Na geometria de Lobachevsky algumas curvas podem ser consideradas retas. (Boyer, 1994)

Na figura a seguir observa-se o ponto P fora da reta L e 3 retas L1, L2 e L3 passando pelo ponto P. Nota-se que as retas L1, L2 e L3 são paralelas a reta L e pode-se traçar outras infinitas retas passando por P que são paralelas a L.

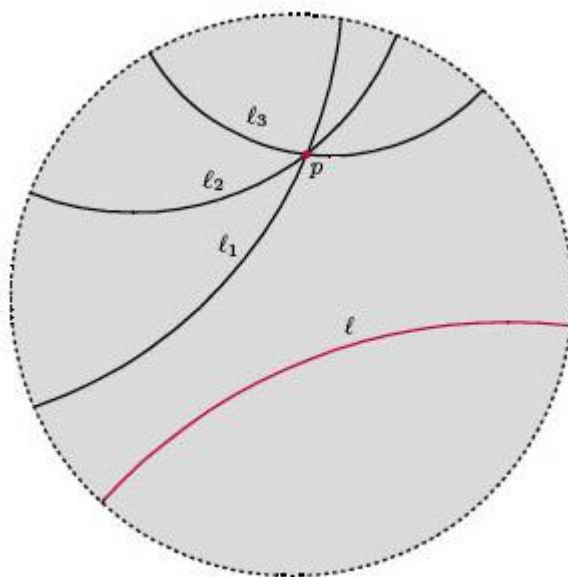


Figura 4: Disco de Poincaré- analogia para geometria hiperbólica de Lobachevsky

Sobre o efeito das descobertas de Lobachevsky, Boyer (1994) afirma:

Num certo sentido a descoberta da geometria não-euclidiana desferiu um golpe devastador na filosofia Kantiana comparável ao efeito que teve sobre concepções pitagóricas a descoberta das grandezas incomensuráveis. Através da obra de Lobachevsky tornou-se necessário rever as concepções fundamentais sobre a natureza da matemática; mas os colegas de Lobachevsky estavam demasiado próximos da situação para vê-la na perspectiva apropriada, e o desbravador de novos caminhos teve que elaborar suas ideias na solidão. (Boyer, 1994, P.396).

Lobachevsky, devido ao fato de sua geometria ser totalmente não intuitiva, classificou-a como “geometria imaginária”. Ou seja, aparentemente ela não possuía nenhuma utilidade prática. No entanto, mais tarde ela auxiliou na descrição do espaço-tempo na teoria da relatividade geral de Einstein. (Boyer, 1994)

Outro matemático que persistiu em demonstrar o axioma das paralelas foi o Húngaro Janos Bolyai (1802-1860). Seus resultados foram semelhantes aos de Lobachevsky, em 1829, depois de concluir que a prova do axioma das paralelas era um problema insolúvel, trabalhou no que chamou de “Ciência absoluta do espaço”. Seus

estudos postulavam que dado um ponto fora de uma reta, existem infinitas retas que passam por esse ponto e são paralelas à reta dada. (Boyer, 1994)

Depois de desenvolvida, a geometria não euclidiana não ganhou notoriedade, ela só ascendendo na matemática depois de ser integrada aos estudos do matemático alemão Bernhard Riemann (1826-1866) que estudou a geometria elíptica. Seu estudo se voltou para uma figura tridimensional, a esfera. Nessa geometria, dado um ponto A fora de uma reta Alpha, não existe nenhuma reta que passe por A e seja paralela à reta alpha, pois todas as retas são construídas pela trajetória mais curta, ou seja, devem passar pela parte central da superfície da esfera. Diferente da geometria de Lobachesky onde existiam infinitas retas paralelas, na teoria de Riemann não existe nenhuma reta paralela. Outra característica importante dessa geometria é a soma dos ângulos internos do triângulo, que nela é 270° (Filho, 2015).

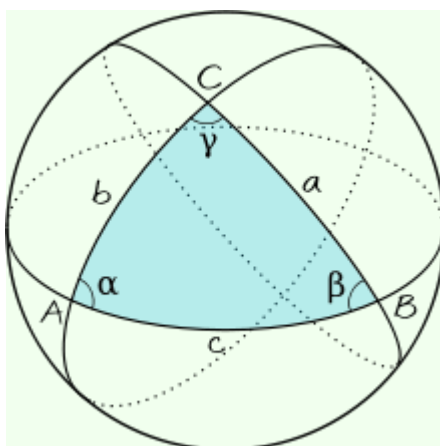


Figura 5: Representação da geometria de Riemann

1.3- Geometria euclidiana e natureza

Um das aplicações da geometria é a representação das formas existentes da natureza. A geometria euclidiana realiza esta tarefa por meio dos recursos que são disponíveis a ela, isto é, retas, quadrados, círculos, triângulos e todas as outras figuras estudadas por essa geometria. A ideia preconizada por Euclides era que, apesar de

essas imagens da natureza serem demasiadamente complexas, elas poderiam ser decompostas em figuras simples para serem representadas. Por exemplo, para representação de uma nuvem decomponha-se ela em esferas de diferentes tamanhos, e então é possível descrevê-las sem muitos problemas. Para representar um raio basta decompô-lo em diferentes semirretas. Este fato também é bem explicado por um relato tradicional da vida de Euclides, segundo Miranda (2004):

Há mais de dois mil anos, Euclides enquanto caminhava pela praia, notou que a areia, visto como um todo se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis. Desde então empenhou-se em provar que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples. (Cubos, triângulos, prismas) (Miranda, 2004, Pag. 32)

Todavia, nesse sentido, Euclides acabou concentrando-se totalmente na forma dos objetos e negligenciou um aspecto importante nas representações, a dimensão do objeto. Citando a famosa frase de Benoit Mandelbrot, citada por Batanete et al (2004-2005, p.32) “Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, tronco de árvores não são suaves e nem o relâmpago viaja em linha reta”. Essa frase de Mandelbrot tenta traduzir de maneira concisa a complexidade e a irregularidade da natureza. As figuras da natureza não são suaves e nem sempre são regulares, majoritariamente os objetos são irregulares e rugosos. Assim como a areia da praia observada por Euclides, os objetos podem parecer “Euclidianos” a primeira vista, no entanto, quando mudamos a escala de estudo, o objeto toma uma forma distinta da inicial.

A geometria fractal, desenvolvida no final do século XX, emerge com a proposta de representar de forma mais fidedigna as irregularidades presentes na natureza, visando “tampar” os buracos da geometria euclidiana.

Nesse contexto, depois de os matemáticos constatarem que a geometria euclidiana não era a única forma de estudar geometricamente o mundo, houve o surgimento de figuras matemáticas que exigiam novos estudos para entender sua natureza. Devido ao fato delas não se encaixarem nas definições geométricas existentes, foram categorizadas como “monstros matemáticos”

1.4 – Os “monstros matemáticos”

A geometria fractal foi desenvolvida no século XX por Benoit Mandelbrot. Seus estudos se pautaram, entre outras coisas, nos chamados “Monstros matemáticos”. Figuras matemáticas singulares, pois não entravam nas categorias tradicionais de dimensão das geometrias vigentes. Essas figuras tinham características que mais tarde seriam atribuídas aos fractais, como autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão fracionada. A origem dessas pode ser localizada temporalmente no fim do século XIX e início do XX e, ela é derivada do fascínio que alguns matemáticos tinham nessas figuras que desafiavam as descrições matemáticas até então estabelecidas e que também foram rejeitadas por muitos matemáticos por serem contrária a cosmovisão científica dominante na época (Baier, 2005), (Batanete et al, 2004-2005).

Uma das primeiras contribuições para esse “movimento” foi realizada por Karl Weierstrass (1815-1897). Sua contribuição com a chamada curva de Weierstrass, segundo Miranda (2012, p.2), essa curva é “o exemplo de uma função com propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferencial”. Ainda em Miranda (2012, p.2), “o gráfico dessa função atualmente é chamado de fractal.”.

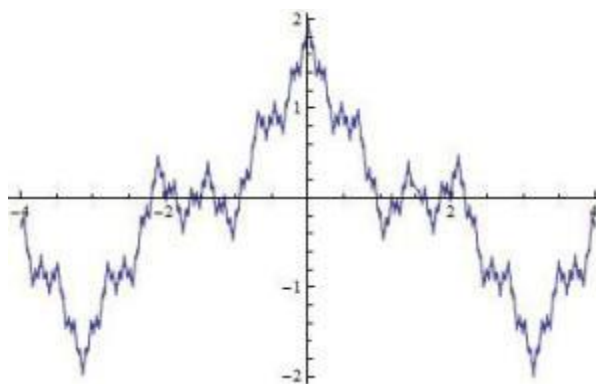


Figura 6: Curva de Weierstrass

Depois da curva de Weierstrass, outra contribuição foi realizada por Georg Cantor (1845-1918) em 1883. Cantor foi responsável pela construção do chamado conjunto de Cantor, que consiste em uma figura com dimensão fracionada (Conceito

que será trabalhado no capítulo três). Sua construção se dá a partir de um segmento de reta, divide-o em três partes iguais e suprima-se a parte central. Repete-se o processo infinitamente. (Miranda, 2012)

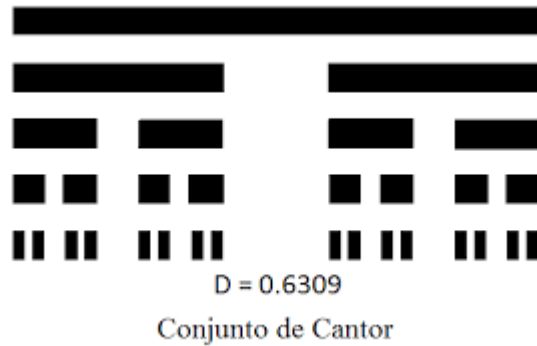


Figura 7: O conjunto de Cantor acima trabalha com a fragmentação do intervalo fechado $[0, 1]$.

Entre os anos de 1890 e 1925 foram construídas diversas curvas por diferentes matemáticos. Estas foram denominadas curvas de Peano em homenagem ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), (Miranda, 2012). As construções dessas curvas preenchem uma área de um plano, como mostra a figura a seguir:

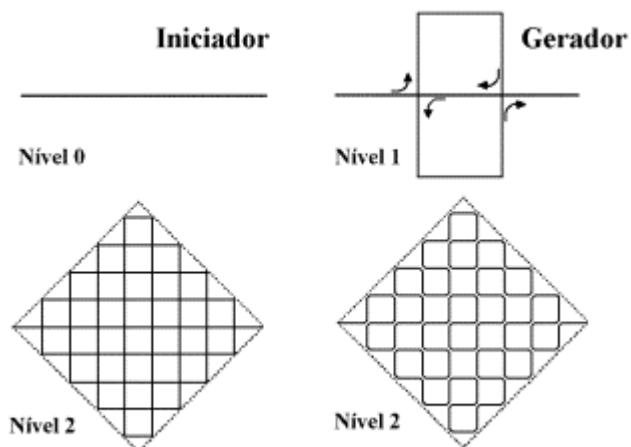


Figura 8: Curva de Peano

Em 1904 surge a curva de Von Koch, essa construída pelo matemático Sueco Helge Von Koch(1870-1924). A curva de Von Koch possui a característica incomum de seu perímetro ser infinito e ainda assim delimitar uma área finita (Cruz, 2014).

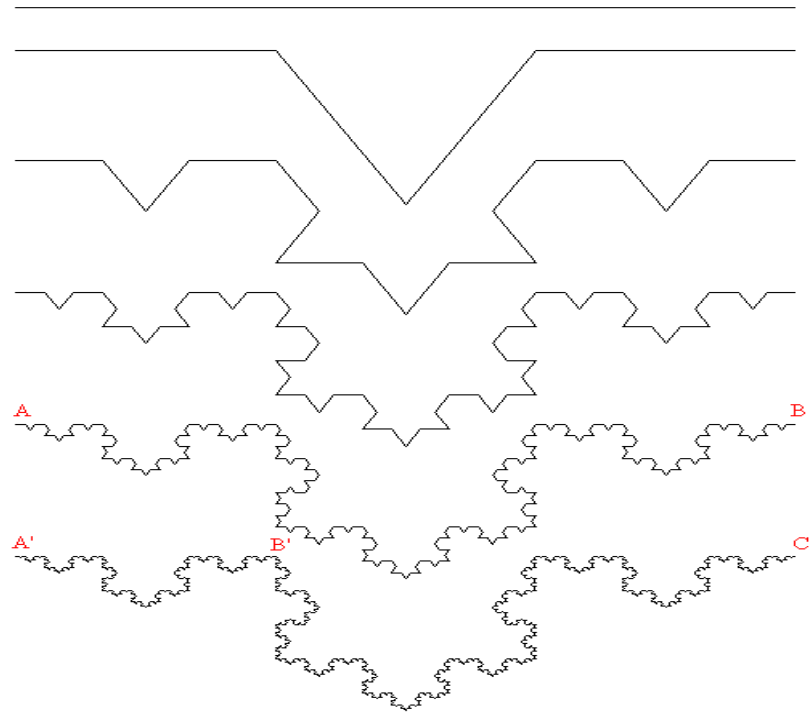


Figura 9: Curva de Von Koch

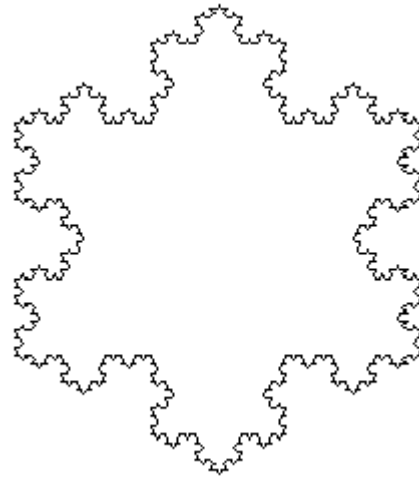


Figura 10: Derivação da curva de Von Koch, conhecida como floco de neve de Koch

No ano de 1918 foi publicado outro fractal por Pierre Fatou (1878-1929) e Gaston Julia (1893-1978) que foi denominado conjunto de Julia. Esse se tratava de uma figura que iterava (Repetia um mesmo processo repetidas vezes) números complexos. O conjunto de Julia se traduz nas imagens de diversas formas. Segundo Miranda (2004) p.7: “Alguns conjuntos de Julia são semelhantes a círculos comprimidos e deformados. Outros estão quebrados em regiões. Outros ainda parecem partículas de poeira separadas.”.

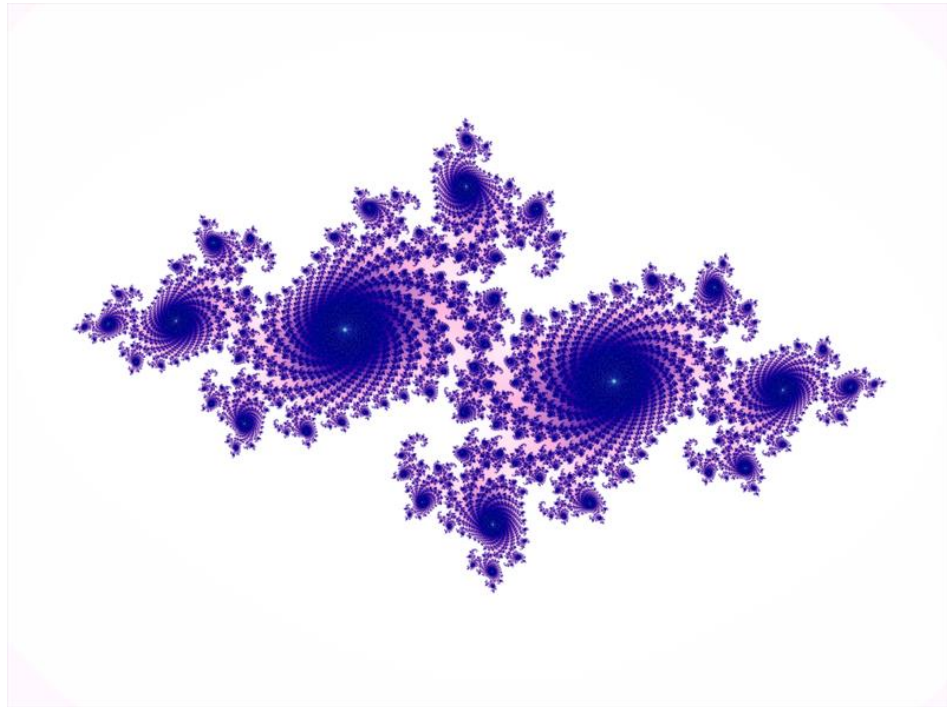


Figura 11: Conjunto de Julia

Essas foram algumas das figuras que fomentaram o estudo da geometria fractal devido a sua peculiaridade matemática, isto é, devido a fuga das descrições geométricas euclidianas. Esse movimento foi a vanguarda para o estudo dessa área da matemática, todavia, só foi possível desenvolvê-la plenamente com o advento da computação. Pois os computadores permitiam um cálculo mais rápido de números extensos e que tendiam ao infinito.

1.5- Geometria fractal

Benoit Mandelbrot é o grande expoente da geometria fractal. Pois foi o primeiro a associar os monstros matemáticos a fenômenos da natureza e a outras áreas do conhecimento. Pode-se dizer que Benoit Mandelbrot está para geometria fractal, assim como Euclides está para geometria Euclidiana (Rabay, 2013). Por isso faremos um breve apanhado da sua biografia.

Benoit Mandelbrot nasceu na cidade de Varsóvia na Polônia. Era um matemático de origem Judaica. Em 1936, com 11 anos, migrou para a França com sua

família, seu pai era vendedor de roupas, e sua mãe dentista. Estudou na França no *École Polytechnique*. Em 1948 foi para os Estados Unidos para estudar ciências aeroespaciais, obteve o título de mestre nessa área. Logo depois, voltou a Paris e obteve seu doutorado em ciências matemáticas na universidade de Paris. Em 1958 ingressou na IBM (International Business Machines) nos Estados Unidos, onde realizou seus trabalhos mais importantes.



Figura 12: Benoit Mandelbrot

Foi na IBM que Mandelbrot conseguiu o necessário para trabalhar de forma mais eficiente com os fractais, pois lá ele dispunha dos melhores computadores que seriam capazes de realizar os cálculos e representar os gráficos dos “monstros matemáticos”. A primeira vez que Mandelbrot associou os fractais com algum tipo de fenômeno foi quando enfrentava um problema com ruídos em linhas telefônicas na IBM. Barbosa (2005, citado por Gomes 2010) diz:

Na IBM (Mandelbrot) deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em redes entre computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Resolveu o problema (...) pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor. (Gomes, 2010, p. 46)

Depois de ter conseguido solucionar o problema dos engenheiros da IBM utilizando o conjunto de Cantor, Mandelbrot pôde reconhecer melhor o valor que aquele tipo de figura poderia ter. Começa retomando as pesquisas de Fatou e Julia, do já

citado Conjunto de Julia (Rabay, 2013). Dessa forma, somando a incompatibilidade da geometria Euclidiana com fenômenos irregulares da natureza e a capacidade dos “Monstros fractais” em realizar essa empreitada nasce, formalmente, a geometria fractal. Sobre a incongruência entre a geometria euclidiana e as formas da natureza, Mandelbrot (1997 p.1, citado por Baier, 2005 p.113) diz:

Por que a geometria é descrita frequentemente como fria e seca? Uma das razões está em sua incapacidade para descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de um litoral ou de uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, cascas de árvores não são lisas, nem o relâmpago viaja em linha reta. (Mandelbrot, 1997, p.1)

O termo “fractal” foi cunhado no livro “The Fractal of Nature” escrito em 1977 por Mandelbrot, e é oriundo da palavra latina “fractus” que significa “Quebrar”, referindo-se a dimensão “quebrada” dos fractais, isto é, da dimensão não inteira. (Cruz, 2014). Sobre a geometria fractal Benoit Mandelbrot diz em “The Fractal of Nature”:

Respondendo a esse desafio, eu pesquisei uma nova geometria da natureza e implementa-a num número diverso de situações. Ela descreve muito do que é irregular e fragmentado a nossa volta (...), através da identificação de uma família de formas que eu chamei fractais. (...) Muitos conjuntos fractais são curvas e superfícies, outros não são mais que “poeiras” desconexas e outros ainda são formas tão estranhas que não há bons termos para eles em qualquer ciência ou arte.

A partir de então Mandelbrot aprofundou seus estudos sobre a natureza dos fractais, elaborando e trabalhando seus conceitos, e pesquisando sobre suas possíveis aplicações. Suas principais obras que trabalham com a geometria fractal são “Les objects fractais, forme, Hassard et dimension” (1975), “Fractais: Form, chance and dimension” (1977) e “The fractal of nature” (1977) (Gomes 2010). Apesar da resistência inicial em aceitar os fractais como uma parte integrante da matemática por parte da comunidade científica, devido à teoria dos fractais romper com a tradição da “matemática regular”, essa área foi se difundindo e sendo usada em diversos campos do conhecimento, e sua importância foi sendo expandida.

1.6-Algumas aplicações da geometria fractal

O principal motivo para a ascensão da geometria fractal foi a sua enorme aplicabilidade na ciência e na tecnologia, em áreas muito diferentes umas das outras. Por exemplo, na arquitetura e no urbanismo pesquisadores utilizam a geometria fractal para realizar projetos urbanos. As características do crescimento urbano são extremamente semelhantes aos fractais. Segundo Martins et al(2006):

Um fato interessante é que as propriedades dos fractais são as mesmas dos padrões urbanos: Não homogeneidade, fragmentação, rugosidade, organização hierárquica interna, mesmo princípio de distribuição dos elementos em varias escalas, existências de clusters em cada escala e a homogeneidade em casos restritos. (Martins et al, 2006, p.92)

Outra aplicação relevante é no diagnóstico precoce de câncer. A partir da análise da imagem da provável célula cancerígena, é possível determinar, utilizando o cálculo da dimensão fractal, se ela é efetivamente uma célula tumoral. (Sedivy, 1998). A utilização para o desenho de antenas com maior poder de transmissão (Oliveira, 2008). Também se pode considerar a alta capacidade da geometria fractal para modelar e descrever inúmeros fenômenos e elementos da natureza. Por exemplo, recentemente foi descoberta a natureza fractal das ramificações dos pulmões, veias e artérias da anatomia dos animais, que também servem para explicar a maior eficiência energética dos animais grandes. (Rabay, 2013). Existem diversas outras aplicações em outras áreas, no entanto elas fogem ao escopo do texto. No próximo capítulo será abordado os conceitos da geometria fractal e será trabalhada a construção de alguns fractais.

Capítulo 2- Geometria fractal: Conceitos e exemplos

2.1- O que é um fractal?

As definições concisas do que seria um fractal são problemáticas. Atualmente não existe consenso entre os matemáticos que trabalham com a geometria fractal do que seria um fractal. Suas definições se situam estritamente nas características principais dos fractais (Zanotto, 2015). Mas a definição formal foi inicialmente elaborada por Benoit Mandelbrot, segundo Zanotto (2015, p.25) um fractal para Mandelbrot é “é um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovith excede estritamente sua dimensão topológica.” Essa definição não foi muito aceita, pois excluía alguns conjuntos que poderiam ser considerados fractais, dessa forma outros matemáticos foram concebendo suas próprias definições. De acordo com Sallum (2005 p.1, citado por Bemfica e Alves, 2012 p.7):

Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços a reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro. (Sallum, 2005, p.1)

Outra definição, elaborada pelo matemático britânico Kenneth John Falconer, não constitui uma sentença suscinta do que é um fractal, mas se baseia nas características dos fractais, isto é, se em uma dada figura for identificada essas característica, ela pode ser considerada um fractal. Segundo Falconer (Citado por Zanotto, 2015):

Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- F possui alguma forma de “autossimilaridade” ainda que aproximada ou estatística;
- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que sua dimensão topológica;
- O conjunto pode ser expresso através de um procedimento recursivo e iterativo.

Nesse capítulo vamos definir brevemente cada uma das características que, segundo Falconer, é próprio dos fractais.

2.1.1- Autossimilaridade

A autosemelhança se baseia na característica dos fractais que fazem as partes serem semelhantes ou iguais ao todo. Escolhe-se um trecho da figura, e este se torna uma imagem igual a inicial. Existem dois tipos de autossimilaridade, a exata e a estatística (Batanete et al, 2005). A autossimilaridade exata consiste, por exemplo, naquela encontrada em alguns dos fractais clássicos, como os visto no capítulo 1, a exemplo a curva de Von Koch. E a autossimilaridade estatística, que também é chamada de aproximada, é aquela que é encontrada nos objetos da natureza. Pode-se considerar as árvores, quando se observa as suas ramificações nota-se uma semelhança com o todo, no entanto tem-se algumas nuances, como um galho um pouco mais torto para um lado e folhas não tão simétricas que faz ela ter apenas autossimilaridade aproximada .



Figura 13: Exemplo de autossimilaridade aproximada

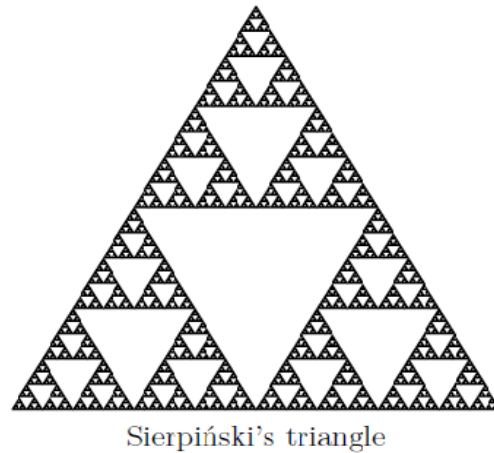


Figura 14: Exemplo de autossimilaridade exata

2.1.2-Iteração

Na matemática, Iteração ou complexidade infinita é o processo de repetição constante de uma mesma ação, e que é o processo que o fractal passa para ser construído. Basicamente, consiste em um processo recursivo que segue uma regra pré-determinada, e esta é seguida infinitamente, o que justifica a sua nomeação como complexidade infinita (Zannoto, 2015). O Triângulo de Sierpinski acima figura um ótimo exemplo da complexidade infinita. A regra de sua iteração é: Dado um triângulo equilátero, marca-se os pontos médios de suas arestas, liga-se esses pontos formando 4 novos triângulos menores, em seguida suprime-se o triângulo do meio e repete-se o processo nos triângulos restantes.

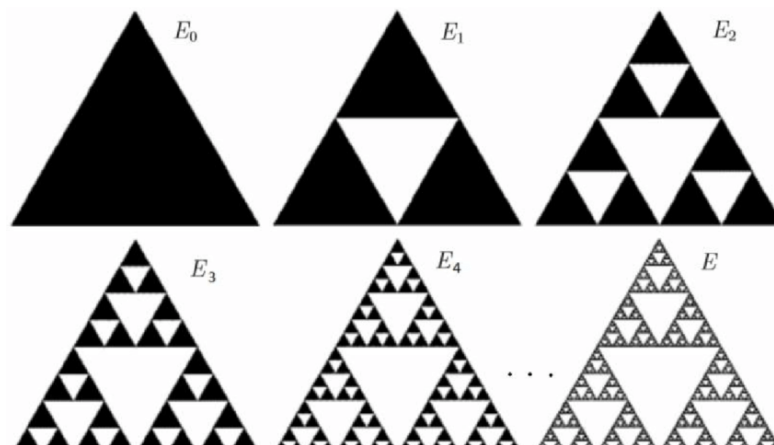


Figura 15: Construção do triângulo de Sierpinski

Sobre a iteração dos fractais Farias (2012) explica:

O sentido de iterar um padrão está relacionado à repetição que pode ocorrer indefinidamente. Assim, a cada iteração, o padrão chega a um nível sucessor que será a base para a iteração seguinte. Especificamente nos padrões fractais, cada iteração resulta na representação de um próximo nível, composto de partes autossimilares ao todo. Ademais, por poder ocorrer uma quantidade indefinida de iterações, um padrão fractal possui a propriedade complexidade infinita. (Farias, 2012, p. 33)

2.1.3- Dimensão fractal

A dimensão da geometria fractal é uma das características mais importantes da geometria fractal. Sua definição é diferente da definição de dimensão euclidiana, ela não mede a dimensionalidade do objeto no plano, mas sim seu nível de rugosidade. A fórmula para calcular a dimensão fractal do objeto é:

$$D = \frac{\log n}{\log \frac{1}{m}}$$

Sendo n a quantidade de objetos gerados e m o fator de redução do fractal, utiliza-se duas iterações subsequentes para chegar ao resultado. Esses conceitos serão mais bem explicados no capítulo 3, que será dedicada integralmente à dimensão fractal, sua demonstração e aplicações no fractal.

2.2- Alguns fractais e suas construções

Como já foram mencionados, os fractais são figuras que possuem como suas principais características a dimensão fracionada, a autossimilaridade e iteração. Essa última característica é a responsável pela construção dos fractais e a sua complexidade infinita. No restante desse capítulo será feito a construção de diferentes fractais utilizando a iteração, faremos a construção de alguns fractais clássicos e alguns já mencionados no capítulo anterior.

Segundo Baldovinotti (2011), os fractais se dividem em 6 tipos: Fractais pela fronteira, Fractais tipo Dürer, fractais tipo árvore, fractais por expansão, fractais por remoção e fractais algébricos. Serão mostrados exemplos de alguns de cada categoria e suas construções.

2.3- Fractais pela fronteira

A construção dos fractais de fronteira se dá pela supressão de um trecho da figura e pela substituição por uma maior. Segundo Zanotto (2015):

O método da fronteira consiste em formar uma iteração por meio de um aumento em determinado “pedaço” do fractal, ou seja, a partir de um todo dividimos ele em partes iguais. Após substituímos algumas dessas partes por mais de uma da mesma medida, formando um conjunto de comprimento maior que inicial. (Zanotto, 2015, p.30)

Os exemplos mais conhecidos são a curva de Koch e a curva de Peano.

2.3.1- Curva de Koch

Passo um: Considerar um segmento de reta qualquer

Passo dois: Dividi-lo em três segmentos congruentes

Passo três: Traçar dois seguimentos que formaram um triângulo equilátero com o seguimento central.

Passo quatro: Suprimir o seguimento central.

Passo cinco: Repetir os passos dois, três e quatro nos seguimentos restantes.

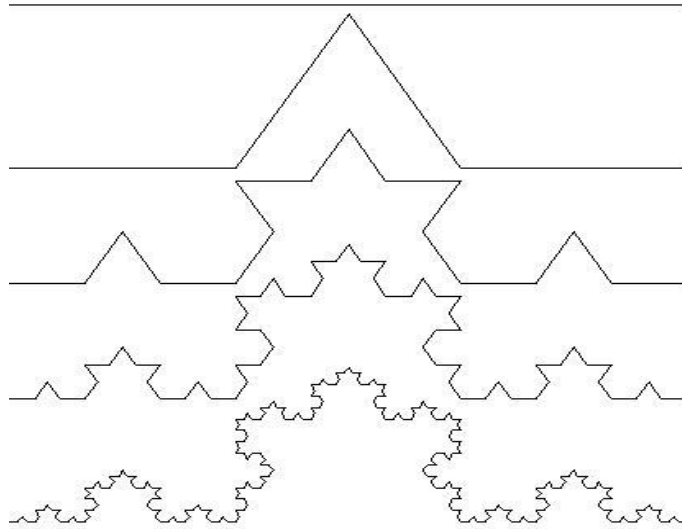


Figura 16: 4 iterações da curva de Koch

2.3.2- Curva de Peano

Passo um: Considerar um segmento de reta qualquer.

Passo dois: Dividir o segmento em três partes congruentes.

Passo três: A partir do seguimento central construir um quadrado acima e abaixo dele.

Passo quatro: Repetir os passos dois e três nos seguimentos restantes.

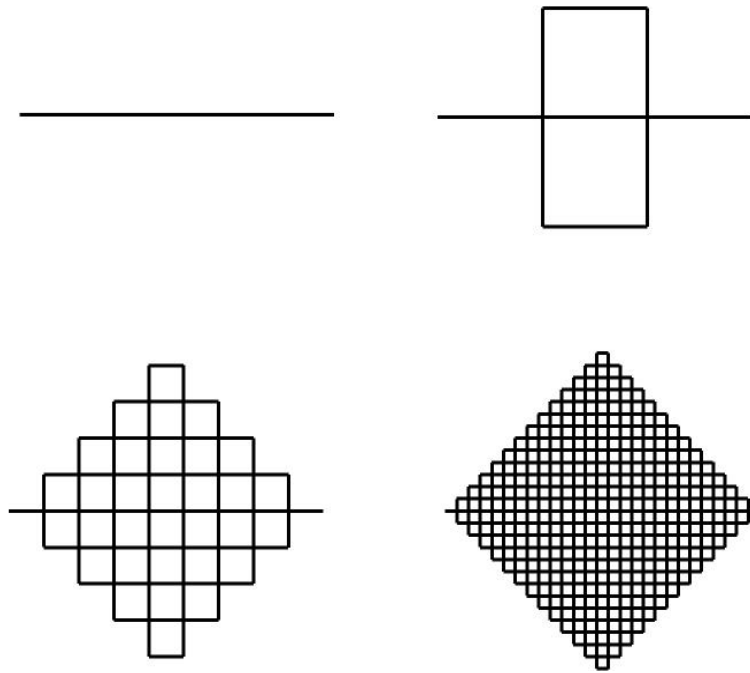


Figura 17: Curva de Peano com três iterações

2.4- Fractais por remoção

Os fractais por remoção são assim chamados, pois são construídos por meio de remoções sucessivas de uma figura inicial. É removida de dentro do polígono uma figura igual a inicial, mas em menor escala. Os mais conhecidos desses fractais são o triângulo de Sierpinski, o tapete de Sierpinski e a esponja de Menger.

2.4.1- Construção do Triângulo de Sierpinski

Passo um: Considerar um triângulo equilátero.

Passo dois: Marcar os pontos médios de suas arestas.

Passo três: Formar outro triângulo equilátero com vértices nos pontos médios marcados no passo anterior.

Passo quatro: Suprimir o triângulo feito.

Passo cinco: Repetir os passos dois, três e quatro nos triângulos restantes.

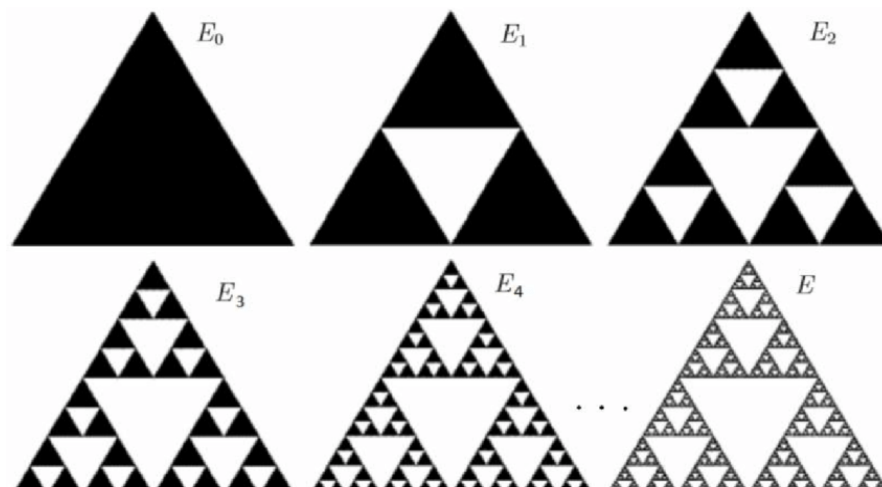


Figura 18: Cinco iterações do triângulo de Sierpinski

2.4.2- Tapete de Sierpinski

Passo um: Considerar um quadrado

Passo dois: Dividi-lo em nove quadrados congruentes.

Passo três: Suprimir o quadrado central.

Passo quatro: Repetir os passos dois e três nos quadrados restantes.

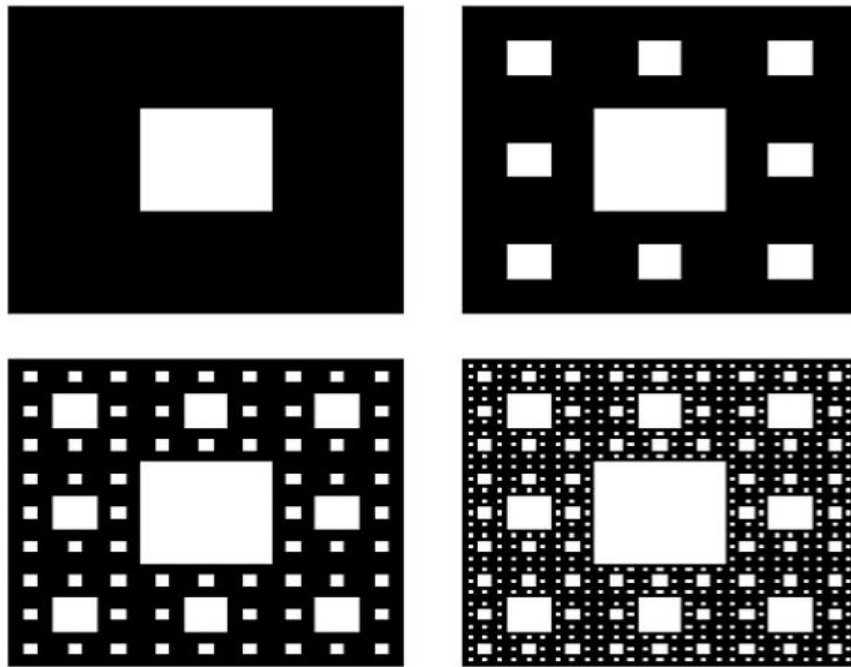


Figura 19: 3 iterações do tapete de Sierpinski

2.4.3- Esponja de Menger

A esponja de Menger consiste em basicamente uma extensão do tapete de Sierpinski para três dimensões. Ela foi construída pelo matemático austríaco Karl Menger.

Passo um: Considerar um cubo.

Passo dois: Divida-lo em 27 cubos congruentes.

Passo três: Suprimir os cubos centrais de cada face e o cubo mais interno.

Passo quatro: Repetir os passos dois e três nos cubos restantes.

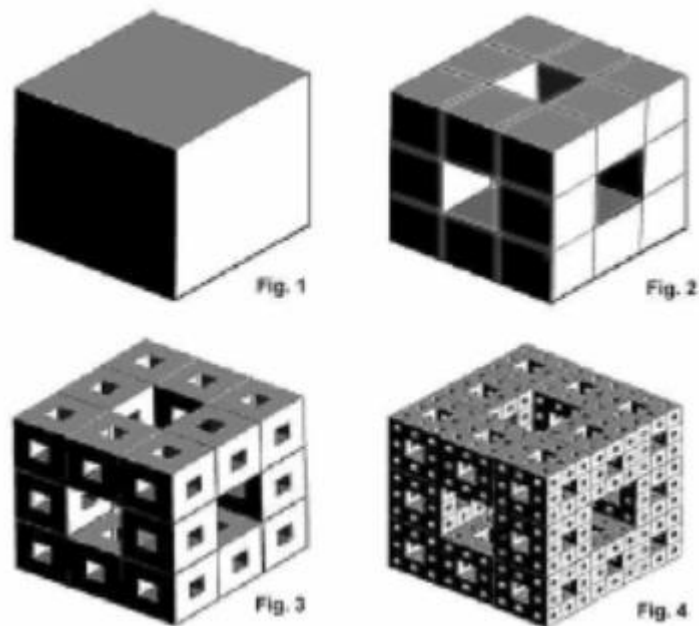


Figura 20: 3 iterações da esponja de Menger

2.5- Fractais tipo árvore

Os fractais do tipo árvore são construídos a partir de ramificações de uma figura inicial, dessa forma, a figura gerada torna-se semelhante a uma árvore. (Baldovinotti, 2011)

2.5.1- Árvore pitagórica

Passo um: Considerar um quadrado.

Passo dois: Construir na face superior do quadrado um triângulo retângulo, sendo a face superior do quadrado a hipotenusa.

Passo três: Construir novos quadrados partido dos catetos do triângulo retângulo construído no passo anterior.

Passo quatro: Repetir os passos 2 e 3 nos novos quadrados.

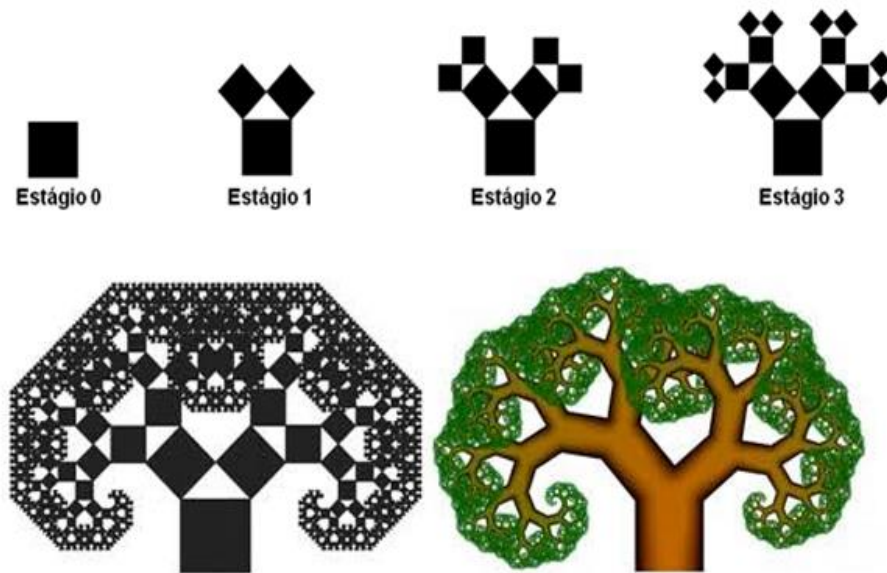


Figura 21: Acima: Primeiras iterações da árvore pitagórica

Abaixo: Uma árvore pitagórica depois de inúmeras iterações (a esquerda) e representação artística da árvore pitagórica (a direita)

2.6- Fractais do tipo Dürer

Albrecht Dürer (1471-1528) foi um matemático, físico, desenhista e pintor profissional do século XVI, foi responsável por criar figuras que no futuro seriam consideradas fractais. Dessa forma, as figuras criadas por Dürer foram denominadas fractais de Dürer.

2.6.1- Dürer pentagonal

Passo um: Considerar um pentágono regular

Passo dois: Construir cinco pentágonos regulares em menor escala, de modo que um vértice deles coincida com o vértice do pentágono maior e que dois de seus vértices encontrem os vértices dos pentágonos construídos nos vértices adjacentes.

Passo três: Suprimir o pentágono central e as áreas entre os pentágonos dos vértices.

Passo quatro: Repetir os passos dois e três nos pentágonos novos.



Figura 22: Duas iterações no pentagonal de Dürer

Além do pentagonal de Dürer também existem outros que obedecem a mesma regra de construção. Sempre os processos nas construções dos fractais de Dürer são análogos, apenas para ilustrar, podemos citar um outro exemplo, o chamado hexagonal de Dürer (Zanotto, 2015).

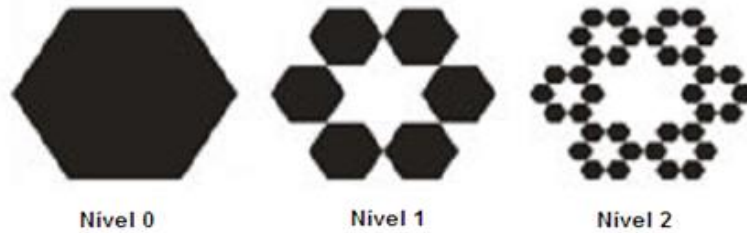


Figura 23: Duas iterações do Hexagonal de Dürer

2.7- Fractais por expansão

Os fractais por expansão consiste na expansão de polígonos do interior para o exterior da figura inicial. A distinção desse fractal para os outro é que a figura inicial é constituída por mais de uma figura geométrica.



Figura 24: Exemplo de fractal por expansão

2.8- Fractais Algébricos

Os fractais algébricos tem uma complexidade um pouco maior do que os apresentados até agora. Eles são construídos partindo de iterações de equações não lineares. O mais conhecido e mais famoso fractal desse tipo é o chamado conjunto de Mandelbrot.

2.8.1- Conjunto de Mandelbrot

O conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os pontos, que não tendem ao infinito, que são obtidos por iterações sucessivas da equação:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

Sendo Z e C números complexos, em que C é uma constante e $Z_0 = 0$.

- Exemplos 1: Adotando $C = 1$ e $Z_0 = 0$, temos:

$$\begin{aligned}Z_0 &= 0 \\Z_1 &= 0^2 + 1 = 1 \\Z_2 &= 1^2 + 1 = 2 \\Z_3 &= 2^2 + 1 = 5 \\Z_4 &= 5^2 + 1 = 26 \\&\vdots\end{aligned}$$

Nessas iterações nota-se que, utilizando a constante $C = 1$, as iterações tendem ao infinito, dessa forma estão fora do Conjunto de Mandelbrot.

- Exemplo 2: Adotando $C = -2$ e $Z_0 = 0$, temos:

$$Z_0 = 0$$

$$Z_1 = 0^2 - 2 = -2$$

$$Z_2 = (-2)^2 - 2 = 2$$

$$Z_3 = 2^2 - 2 = 2$$

⋮

Nessas iterações nota-se que a partir da segunda iteração o resultado fixa no número 2, portanto, esse ponto está dentro do Conjunto de Mandelbrot.

- Exemplo 3: Adotando $C = \sqrt{-1}$ ou i e $Z_0 = 0$, temos:

$$Z_0 = 0$$

$$Z_1 = 0^2 + i = i$$

$$Z_2 = i^2 + i = -1 + i$$

$$Z_3 = (-1 + i)^2 + i = -i$$

$$Z_4 = (-i)^2 + i = -1 + i$$

⋮

Nessas iterações nota-se a oscilação entre $-1 + i$ e $-i$. Como não tendem ao infinito esses pontos estão no conjunto de Mandelbrot. O gráfico do conjunto de Mandelbrot é formado por todos os pontos que não tendem ao infinito nas iterações. Ele se mostra da seguinte forma:

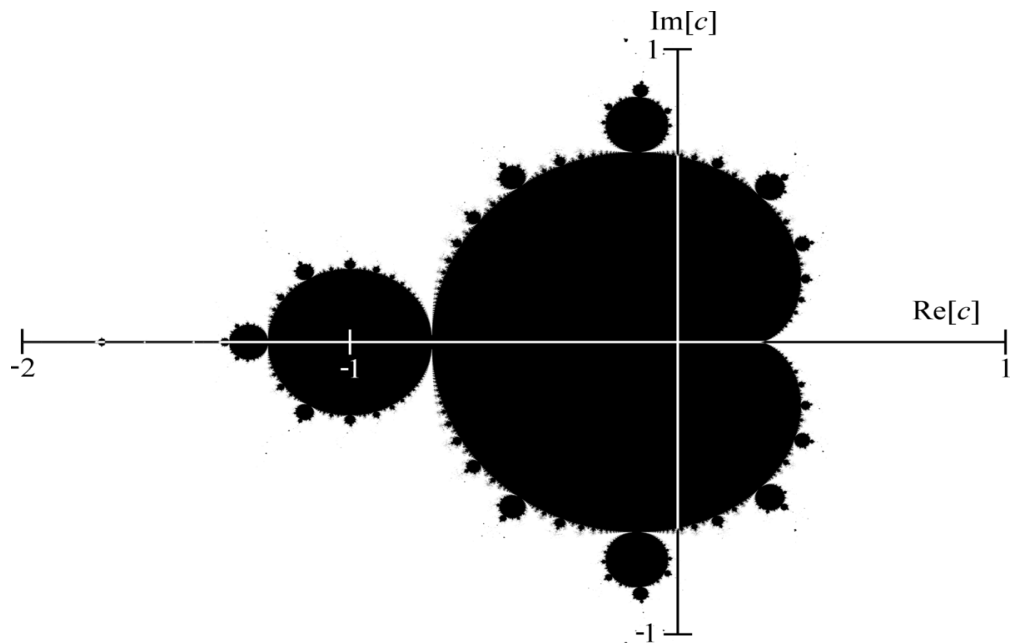


Figura 25: Conjunto de Mandelbrot

Nesse capítulo foi apresentado alguns dos fractais e suas construções, priorizando citar ao menos um exemplo de cada tipo de fractal. No próximo capítulo, será definida e demonstrada a dimensão fractal, e ela será aplicada a alguns dos fractais presentes neste capítulo.

Capítulo 3- Dimensão fractal

3.1- O conceito de dimensão fractal

Diferentemente das outras geometrias não euclidianas, a parte da geometria fractal que é distinta da geometria euclidiana não é a negação do quinto postulado, mas a definição distinta de dimensão. A geometria euclidiana mede a dimensionalidade do objeto no espaço, isto é, se ele está inserido em apenas uma dimensão, como é a reta, ou duas como é o plano, já a geometria fractal mede o nível de irregularidade do objeto. Devido a essas distinções nos conceitos de dimensão das duas geometrias, explica-se o fato de a geometria fractal possuir figuras como dimensões fracionadas. (Baldovinotti, 2011)

Sabendo que a dimensão fractal mede o nível de irregularidade do objeto, percebe-se uma relação diretamente proporcional entre a irregularidade e a sua dimensão, ou seja, quanta mais irregular o fractal, maior é a sua dimensão.

Para ilustrar a dimensão fractal podem ser consideradas as medições de fronteiras entre países. Caso queria-se medir a fronteira de um país a partir de imagens de satélites, obtém-se um valor. Caso a medição seja realizada por uma aeronave, um valor diferente é encontrado. Se quiser ser captado um número maior de imperfeições da fronteira, um geógrafo pode caminhar pela costa para obter valores mais aproximados, medindo todos os contornos e das rochas e praias por exemplo. (Nunes, 2006)

Em síntese, a dimensão fractal traduz a ocupação do objeto no espaço, que está intimamente ligado a irregularidade do fractal. Para desenvolver esse conceito de dimensão fractal, Mandelbrot utilizou as ideias do matemático Felix Hausdorff (1868-1942) sobre dimensões fracionárias. (Fernandes, 2007)

3.2- Dimensão fractal ou de Hausdorff

1) Considerar um segmento de reta dividida em 3^1 partes iguais, em que 3 representa o número de partes e 1 a dimensão do objeto dividido. Denominamos o coeficiente de redução como $\frac{1}{3}$, isto é, o tamanho de cada parte mede $\frac{1}{3}$ do segmento original.



Figura 26: Segmento de reta

2) Para o quadrado temos 3^2 partes iguais, e seu coeficiente de redução é

$$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

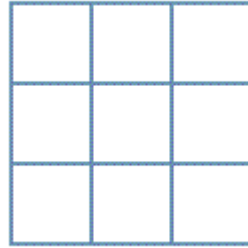


Figura 27: Quadrado dividido em 9

3) Para o cubo temos 3^3 partes iguais, e seu coeficiente de redução é expresso por $\frac{1}{3^3}$.

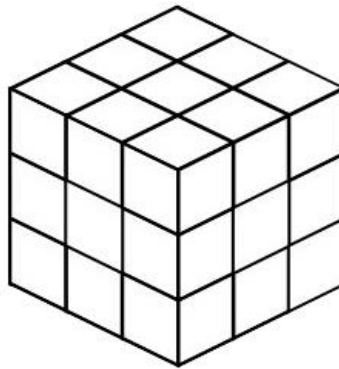


Figura 28: Cubo dividido em 27 partes

Os exemplos anteriores poderiam ser realizados para qualquer número de partes, mantendo apenas fixa a dimensão dos objetos utilizados.

Agora, vamos generalizar o processo feito anteriormente, designando por n o número de partes, m sendo o coeficiente de redução e D a dimensão do objeto, pode-se dizer que para a linha tem-se $n = \frac{1}{m^1}$, para o plano tem-se $n = \frac{1}{m^2}$, e para o sólido tem-se $n = \frac{1}{m^3}$. Generalizando:

$$n = \frac{1}{m^D}$$

Que é equivalente a:

$$n = \left(\frac{1}{m}\right)^D$$

Reescrevendo essa igualdade na forma logaritma tem-se:

$$D = \log_{\frac{1}{m}} n$$

Colocando na base 10 tem-se:

$$D = \frac{\log n}{\log \frac{1}{m}}$$

Então, partindo dessa fórmula simples é possível calcular a dimensão dos objetos fractais, ou seja, sua irregularidade. No próximo tópico será aplicada essa fórmula a alguns dos fractais vistos no capítulo dois.

3.3- Dimensão de alguns fractais clássicos

Para realizar o cálculo de dimensão dos fractais é necessário identificar corretamente o número n = Número de partes obtidas e m = Coeficiente de redução. Será feito aqui o cálculo da dimensão de alguns fractais clássicos.

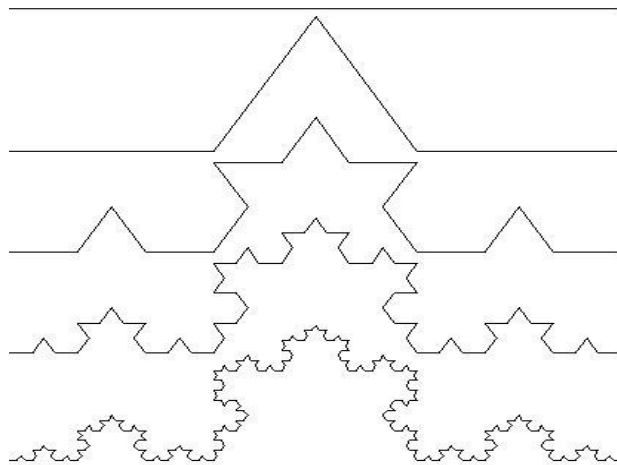


Figura 29: Construção da curva de Koch

Na curva de Koch acima, a partir de um segmento é obtido 4, logo $n = 4$. E cada segmento é $\frac{1}{3}$ do original, portanto $m = \frac{1}{3}$. Aplicando na fórmula, tem-se:

$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,26$$

No triângulo de Sierpinski, o triângulo inicial da origem a 3 outros triângulos, logo $n = 3$. E o lado de cada triângulo obtido tem $\frac{1}{2}$ do lado do triângulo de origem, portanto $m = \frac{1}{2}$. Aplicando a fórmula, tem-se:

$$D = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{1/2}} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,59$$



Figura 30: Primeira fase da construção do triângulo de Sierpinski

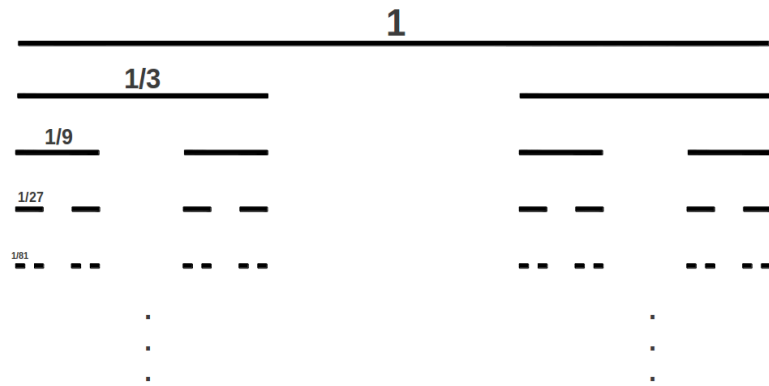


Figura 31: Iterações do conjunto de Cantor, cada segmento de reta possui um terço do valor do trecho que o originou

No conjunto de Cantor acima, cada segmento origina outros 2 segmentos, logo $n = 2$. E cada segmento possui $\frac{1}{3}$ do segmento que o originou, portanto $m = \frac{1}{3}$.

Aplicando a fórmula, tem-se:

$$D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63$$

Na curva de Peano, cada seguimento origina 9 outros segmentos de reta, logo $n = 9$. E cada segmento possui $\frac{1}{3}$ do segmento que o deu origem, portanto $m = \frac{1}{3}$.

Aplicando a fórmula, tem-se:

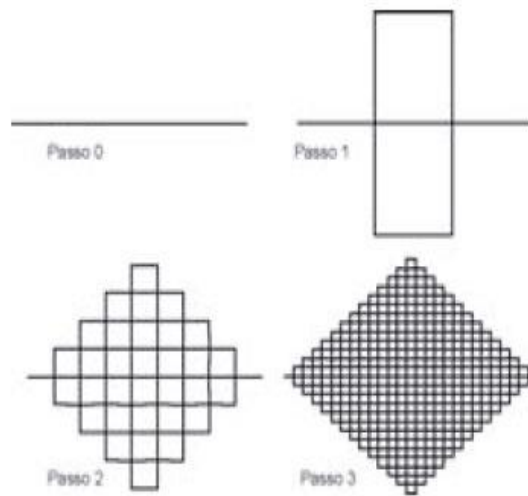


Figura 4: Primeiros passos de construção da curva de Peano.

$$D = \frac{9}{\log_{1/3} 1} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$$

Figura 32: Curva de Peano

O curioso dessa curva é que quando a iteramos infinitamente ela tende a preencher todo o plano e, portanto, sua dimensão tende a 2.

Na esponja de Menger, cada cubo origina outros 20 cubos menores, logo $n = 20$. E cada lado do cubo mede $\frac{1}{3}$ do lado do cubo que o originou, portanto, $m = \frac{1}{3}$.

Aplicando a fórmula tem-se:

$$D = \frac{\log 20}{\log_{1/3} 1} = \frac{\log 20}{\log 3} \cong 2,72$$

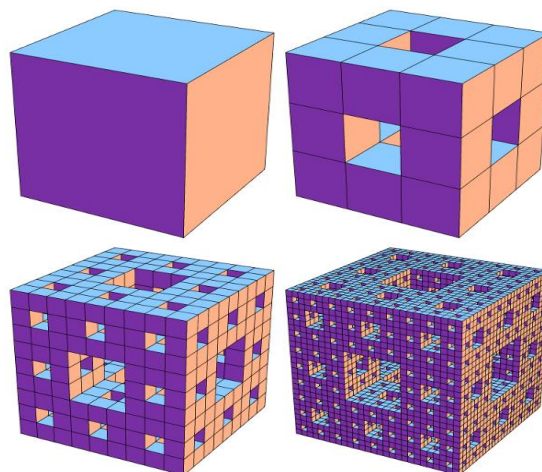


Figura 33: Esponja de Menger

No tapete de Sierpinski, cada quadrado origina outros oito quadrados menores, logo $n = 8$. E o lado de cada quadrado mede $\frac{1}{3}$ do lado do quadrado que o originou, portanto, $m = \frac{1}{3}$. Aplicando a fórmula tem-se:

$$D = \frac{\log 8}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1,89$$



Figura 34: Primeiras iterações do tapete de sierpinski

Conclusão

Nesse trabalho foi descrito um pouco da história da geometria e suas problemáticas, como por exemplo, o quinto postulado de Euclides e a incompatibilidade entre geometria euclidiana e a natureza. O quinto postulado de Euclides gerou discussões por extensos anos e por diversos matemáticos, o culmino dessas discussões foi responsável pela emergência das geometrias não euclidianas.

Por muitos séculos, o pensamento geométrico baseado nos trabalhos de Euclides permaneceu intacto. Durante esse tempo acreditou-se que apesar da natureza ter uma complexidade estupefaciente, ela podia se reduzida meramente a figuras

simples que se combinavam e aumentavam a complexidade. Por exemplo, todas as irregulares observadas em uma nuvem, poderia ser fruto de uma combinação de figuras euclidianas como triângulos, círculos e quadrados. Esse pensamento apesar de parecer lógico, desaguava em representações simplistas da natureza.

A geometria fractal seria uma alternativa para sanar esse problema da geometria euclidiana. Suas raízes se encontravam nos “monstros matemáticos” que foram desenvolvidos nos séculos XIX e início do XX. Mas, apesar disso, ela só pode se desenvolver de forma robusta depois do advento dos computadores, pois, com eles haveria melhor possibilidade para trabalhar com iterações infinitas e suas representações. Esse fato traduz a importância do contexto histórico para o desenvolvimento de uma área do conhecimento. E também, mostra como é necessário estudar áreas que não tenham aplicações práticas de imediato, pois, posteriormente, com estudo e aprofundamento certas áreas podem encontrar aproveitamento e aplicações em diferentes áreas, como foi o caso dos “monstros matemáticos”.

No capítulo 2 foram expressos alguns tipos de fractais e suas construções. Apesar de a primeira vista parecer um assunto de difícil entendimento é notável a relativa simplicidade de construção da maioria das figuras, como as ditas clássicas. Inclusive esta simplicidade justifica a crescente utilização da geometria fractal para ensinar conceitos para alunos de ensino médio. Ela pode ser usada por professores a fim de instigar o aluno e fazê-lo entender as aplicações práticas do conteúdo. Um exemplo clássico é a utilização da geometria fractal para explicar a soma dos fatores de uma PG infinita. Também foi demonstrada de forma sucinta a curiosa “dimensão fractal” que é uma das características que diferencia a geometria fractal das demais geometrias.

Mesmo sendo um novo conhecimento que tem demonstrado enorme potencial de aplicação na tecnologia e na ciência, ainda existe muitas questões problemáticas nos estudos sobre a geometria fractal. Como visto no capítulo 2, não existe definição consensual sobre o que é um fractal e nem sobre suas características. Para isso é necessário mais estudos sobre essa área que vem se mostrando uma das partes mais instigantes da matemática.

Referências Bibliográficas

- GOMES, Antônio do Nascimento et al. Uma proposta de ensino envolvendo Geometria Fractal para o estudo de Semelhança de Figuras Planas. 2010.
- DA COSTA REIS, Jakson Ney. Uma Árvore de Pitágoras Explorando os Fractais no Ensino Médio. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, 2015.
- RABAY, Yara Silvia Freire et al. Estudo e aplicações da geometria fractal. 2013.
- ALVES, Marcos Teixeira et al. O Conjunto de cantor. 2008.
- BALDOVINOTTI, Nilson Jorge. Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática. 2011.
- SEDIVY, R. et al. Fractal analysis: an objective method for identifying atypical nuclei in dysplastic lesions of the cervix uteri. **Gynecologic Oncology**, v. 75, n. 1, p. 78-83, 1999.
- MIRANDA, Aldicio J. Fractais: Conjuntos de Julia e Conjuntos de Mandelbrot. **Sigmae**, v. 1, n. 1, p. 110-118, 2012.
- PEREIRA, Marcelo Gomes. Aplicações da teoria da percolação à modelagem e simulação de reservatórios de petróleo. 2006.
- NUNES, Raquel Sofia Rebelo. Geometria Fractal e Aplicações. **Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade de Porto**, 2006.
- FARIA, Rejane Waiandt Schuwartz. Padrões fractais: contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. 2012.
- BENFICA, A.; ALVES, Cassiana. Fractais: progressão e série geométrica-uma metodologia de ensino. **Revista Modelos. Ano I**, v. 1, 2011.
- DA CRUZ, GRACIELE PEREIRA. Fractais: Padrões complexos de incrível beleza. 2014.
- BAIER, Tânia. O nexo geometria fractal-produção da ciência contemporânea tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico. 2005.
- FERREIRA FILHO, José Roberto et al. Geometria fractal: da natureza para a sala de aula. 2015.
- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar. **São Paulo: Atual**, v. 9, p. 7, 1995.

SANTOS, Almir R. S.: VIGLIONE, Humberto H. de B. Geometria euclidiana plana.

Aracaju: UFS, 2011.

MARION, Alexandre de Oliveira. Análise fractal de fraturas em regime linear elástico: modo I de carregamento. 2011.

FERNANDES, Jaqueline Aparecida. Fractais: uma nova visão da matemática. **Trabalho de Conclusão de Curso, Centro Universitario de Lavras**, 2007.

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no ensino médio. **Revista do professor de Matemática**, v. 57, p. 1-8, 2005.

Márcio Vaz dos Reis. O conjunto de Mandelbrot. 2016. 74 f. Dissertação(Mestrado em matemática em ensino básico) – Instituto de matemática e estatística, Universidade federal de Goiás, Goiânia, 2016.

Tatiana Roque, História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 2º reimpressão, Rio de Janeiro (Rio de Janeiro): Zahar, 2012. 511 p.

Boyer, Carl Benjamin. História da matemática. 3 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1981

Euclides. Os elementos. Tradução: Frederico Commandino. São Paulo: Edições cultura, 1944

